TRANSCENDANCE : ENTRE THÉORIE DES NOMBRES, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET THÉORIE DES MODÈLES.

TRANSCENDENCE: BETWEEN NUMBER THEORY, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MODEL THEORY.

Sommaire

Part 1. Version française

1. Présentation du parcours

Ce parcours propose aux étudiant.e.s de Master un large panorama de cours de mathématiques fondamentales mêlant théorie des nombres, algèbre, analyse et logique. Le dénominateur commun des cours présentés est la transcendance, que ce soit à travers ses aspects classiques (transcendance de valeurs de fonctions analytiques, approximation diophantienne et géométrie des nombres) ou fonctionnels (théorie de Galois différentielle, théorie des modèles et ses applications à l'indépendance algébrique de solutions d'équations différentielles algébriques, G- et E-fonctions et hypergéométrie).

2. Cours de base (24h) - Introduction à la transcendance - Boris Adamczewski

Démontrer la transcendance d'un nombre réel ou complexe, ou même son irrationalité, est généralement un problème d'une grande difficulté. Il en va évidemment de même lorsqu'il s'agit de comprendre les relations linéaires ou algébriques qui peuvent exister ou non entre plusieurs nombres. Dans le domaine de la transcendance, les conjectures sont nombreuses et les résultats beaucoup plus sporadiques. Cela explique sans doute la fascination que ces problèmes exercent sur les mathématicien.ne.s depuis des sciècles.

Ce cours propose une introduction à certaines méthodes de transcendance. L'objectif est de se familiariser avec quelques outils de base qui émaillent les preuves de transcendance (hauteur, inégalité de Liouville, lemme de Siegel, approximants de Padé), de faire un tour d'horizon des résultats classiques liés à la fonction exponentielle comme la transcendance des nombres e, π, $\ln 2$, i^i ou $2^{\sqrt{2}}$, et de montrer ensuite comment ces résultats peuvent se généraliser à des classes plus vastes de fonctions analytiques en abordant deux théories plus complexes qui font l'objet d'avancées récentes. La première est la théorie des E-fonctions de Siegel ; elle concerne l'étude des valeurs aux points algébriques de certaines solutions d'équations différentielles linéaires. La seconde est la théorie des M-fonctions de Mahler dans laquelle les équations différentielles sont remplacées par un autre type d'équations fonctionnelles. Le cours se propose d'étudier plus en détail cette dernière théorie ainsi que certaines de ses conséquences en dehors du champ propre de la transcendance. Nous verrons par exemple ce qu'elle apporte à l'étude de la complexité de la suite des chiffres du développement décimal de $\sqrt{2}$.

Plan provisoire du cours :

1. Approximation diophantienne
2. Transcendance et fonction exponentielle
3. Septième problème de Hilbert
4. Théorème de Schneider-Lang
5. Théorie des E-fonctions de Siegel
6. Théorie des M-fonctions de Mahler et applications

References:

- B. Adamczewski et C. Faverjon, *Méthode de Mahler: relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques*, Proc. London Math. Soc. **115** (2017), 55–90.
- A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 1990.
- F. Beukers, *A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem*, Annals of Math. **163** (2006), 369–379.
- A. B. Shidlovskii, Transcendental numbers, *De Gruyter Studies in Mathematics* **12**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989.
- C. L. Siegel, Transcendental Numbers, Annals of Mathematics Studies **16**, Princeton University Press, 1949.
- M. Waldschmidt, Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **326**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

3. Cours de base (24h) - Équations différentielles linéaires - Julien Roques

La théorie des équations différentielles est d'une très grande richesse. Les problèmes qui s'y posent et/ou les outils qui y sont utilisés touchent à l'algèbre, à l'analyse, à l'arithmétique, à la logique, à la géométrie algébrique, *etc.* Dans ce cours introductif, nous nous concentrerons sur les équations différentielles linéaires. Nous aborderons les thèmes suivants :

(1) Introduction à la théorie de Galois différentielle.
(2) Singularités régulières. Monodromie. Correspondance de Riemann-Hilbert. Densité de la monodromie dans le groupe de Galois différentiel.
(3) Etude des équations hypergéométriques (généralisées).
(4) Réduction modulo p. p-Courbures. Conjecture des p-courbures de Grothendieck.
(5) Singularités irrégulières (si le temps le permet).
(6) Introduction à la théorie des équations aux différences.

Références:

- Galois Theory of Linear Differential Equations, M. Singer et M. van der Put, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 328, Springer, 2003.
- Differential Galois Theory, F. Beukers, From Number Theory to Physics, pp 413-439, Springer Berlin Heidelberg.
- Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$, F. Beukers, G. Heckman, Invent. Math. 95 (1989), no. 2, 325–354.

4. Cours de base (24h) - Introduction à la théorie des modèles, théories ω-stables et o-minimales - Frank Wagner

Nous proposons un cours de 24h au premier semestre, qui aura comme but de donner une introduction aux deux grands domaines des applications de la théorie des modèles moderne, les théories ω-stables et les théories o-minimales. Ces notions ont récemment trouvé des applications dans plusieurs domaines dont la géométrie diophantienne et la théorie de la transcendance. Voici un programme provisoire.

I. Bases.
  - Langage et structures.
  - Formules et espaces de types.
  - Ultraproduits. Théorème de compacité.
  - Élimination de quantificateurs.

II. ω-Stabilité
  - Forking et rangs.
  - Groupes ω-stables et corps.
  - Théories et groupes monobasés.
  - La conjecture de la trichotomie.
  - Corps différentiellement clos.

III. o-Minimalité
  - Propiétés de base des structures o-minimales
  - Groupes et corps définissables.
  - Le théorème de trichotomie.
  - Le corps réel avec exponentiation.
  - Le théorème de comptage de Pila-Wilkie.

Le temps ne permettra pas de traiter tous les sujets ci-dessus. En fonction des connaissances des participants, nous allons accélérer la discussion des bases, ou bien supprimer certains des sujets plus avancés.

Une bonne préparation pour le cours serait le cours optionnel M1 "Introduction à la théorie des ensembles et à la théorie des modèles".

Références:

- Tent/Ziegler: A Course in Model Theory, ASL Lecture Notes in Logic, Series Number 40, 2012
- Pillay: Geometric Stability Theory, Oxford Logic Guides, Clarendon Press, 1996
- van den Dries: Tame topology and o-minimal structures, LMS Lecture Notes Series 248, CUP, 1998
- MacPherson: Notes on o-Minimality and Variations, Model Theory, Algebra, and Geometry, MSRI Publications 39, 2000

5. Cours avancé (24h) - Approximation diophantienne et transcendance - Anthony Poëls

Etant donné $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, une très simple application du principe des tiroirs de Dirichlet permet de trouver une infinité de rationnels p/q tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

D'un autre côté, le théorème Roth – qui a valu la médaille Fields à K. Roth en 1958 – affirme que si α est algébrique (irrationnel), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de p/q satisfaisant

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Autrement dit, les nombres algébriques ne sont pas "bien" approchés par les nombres rationnels. Ce cours est centré autour du très joli théorème du sous-espace de W.M. Schmidt (1972) et ses nombreuses applications en transcendance – dont le théorème de Roth sus-mentionné fait partie. Dans la première partie du cours nous introduirons les outils de géométrie des nombres sur lesquels repose la preuve originale du théorème du sous-espace. Nous étudierons en détails cette dernière dans un second temps. La fin du cours sera consacrée aux applications anciennes comme récentes du théorème du sous-espace en transcendance.

Plan de cours

- Introduction à la théorie de la géométrie des nombres (corps convexes de $\mathbb{R}^n$, minima successifs, théorèmes de Minkowski, dualité, algèbre de Grassmann et théorie des convexes composés de Mahler).
- Preuve du théorème du sous-espace de Schmidt.
- Applications du théorème du sous-espace en transcendance (théorème de Roth, transcendance de fractions continues, complexité des nombres algébriques, équations aux S-unités,...)

Références:

- Y. Bilu. The many faces of the subspace theorem [after adamczewski, bugeaud, corvaja, zannier...]. *Astérisque*, 317(2007):1–38, 2008.
- J. W. S. Cassels. *An introduction to to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

- J.-H. Evertse and H. P. Schlickewei. A quantitative version of the absolute subspace theorem. *J. Reine Angew. Math*, 548:21–127, 2002.
- C. Lekkerkerker. *Geometry of Numbers*, volume VIII of *Bibliotheca mathematica (Amsterdam. 1952)*. Wolter-Noordhoff, 1969.
- W. M. Schmidt. Norm form equations. *Ann. of Math.*, 96(3):526–551, 1972.
- W. M. Schmidt. *Diophantine Approximation*, volume 785 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1980.

6. Cours avancé (24h) - Une introduction aux G-fonctions - Eric Delaygue

Les théories des E-fonctions de Siegel et des M-fonctions de Mahler abordées au premier semestre permettent de transférer l'indépendance algébrique de leurs fonctions à celle de leurs valeurs avec succès. De nombreuses constantes intéressantes, comme les valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers, n'apparaissent pas comme des valeurs de E-fonctions ou de M-fonctions mais plutôt comme des valeurs de G-fonctions de Siegel. Ces dernières sont aussi solutions d'équations différentielles linéaires et un exemple typique est $\log(1-z)$.

Ce cours est une introduction à la théorie des G-fonctions. Nous verrons au travers d'exemples que de nombreuses fonctions d'origines géométrique ou combinatoire sont des G-fonctions. Notre premier objectif sera de décrire des résultats d'irrationalité pour leurs valeurs. En particulier, nous aborderons la célèbre preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$. Le second objectif de ce cours sera de décrire les résultats d'André, Chudnovsky et Katz sur la structure des équations différentielles satisfaites par des G-fonctions. En prolongement du cours sur les équations différentielles linéaires du premier semestre, nous verrons comment ces résultats permettent d'obtenir un résultat optimal de Beukers sur l'indépendance algébrique des valeurs de E-fonctions.

Plan provisoire du cours :

- Irrationalité de $\zeta(3)$
- Les G-fonctions et leurs valeurs
- Structure des G-opérateurs : le théorème d'André–Chudnovsky–Katz
- Théorèmes d'irrationalité
- Application à la théorie des E-fonctions

Références:

- Y. André, *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989. xii+229 pp.
- Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 2, 705–740.
- R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.
- F. Beukers, *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*, Ann. of Math. (2) **163** (2006), no. 1, 369–379.
- B. Dwork, G. Gerotto and F. J. Sullivan, *An introduction to G-functions*, Annals of Mathematics Studies, **133**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. xxii+323 pp.

7. Cours avancé (24h) - Théorie des modèles des corps différentiels de caractéristique zéro - Rémi Jaoui

Nous proposons un cours de 24h au second semestre concernant les applications qui se sont développées durant les trente dernières années d'une branche de la théorie des modèles moderne — l'étude des théories ω-stables — à l'étude des propriétés de transcendance des solutions d'équations différentielles algébriques.

Le but de ce cours sera de présenter les outils modèles-théoriques au cœur de ces applications: la théorie de Galois définissable (Poizat, Pillay, ...) d'une part et la forte minimalité de l'autre (Zilber, Hrushovski, ...) et leurs interactions avec les méthodes d'algèbre différentielle (la théorie de Galois différentielle de Kolchin et les propriétés d'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura). La théorie générale sera illustrée par des énoncés de transcendance pour les solutions d'équations différentielles classiques: les équations différentielles elliptiques, la première équation de Painlevé et l'équation de Picard par exemple.

Plan provisoire du cours :

I. Généralités sur les corps différentiels
   - Algèbre commutative différentielle
   - Les corps différentiellement clos et la topologie de Kolchin.
   - Espaces de jets et élimination des imaginaires.
   - Le théorème de plongement de Seidenberg et interprétation analytique.

II. Équations différentielles algébriques internes aux constantes
   - *Préliminaires*: Base canonique d'un type et principe de réflexivité de Shelah
   - Internalité aux constantes.
   - Groupe de liaison et correspondance de Galois.
   - Équations différentielles logarithmiques.

III. Équations différentielles fortement minimales
   - (Forte) minimalité et orthogonalité.
   - Irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura.
   - Les équations différentielles autonomes d'ordre un: le théorème de Rosenlicht.
   - Un exemple d'ordre deux: la première équation de Painlevé.

IV. Le théorème de trichotomie
   - La propriété de la base canonique et le premier théorème de trichotomie.
   - Un exemple: l'équation de Picard.
   - Le second théorème de trichotomie et ses applications

Références:

- Ed. Elisabeth Bouscaren. Model Theory and Algebraic Geometry: An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture. Lectures Notes in Mathematics, 1696, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- D. Marker, M. Messmer et A. Pillay. Model theory of fields. Lecture Notes in Logic, 5. Association for Symbolic Logic, 2006.
- E.R. Kolchin. Differential algebra and algebraic groups. Pure and Applied Mathematics, Vol 54. Academic Press, New York-London, 1973.
- B. Poizat. Groupes stables. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah[Light of Logic and Knowledge], 2, 1987.

Part 2. English version

1. Presentation of the thematic program

This thematic program offers Master students a broad panorama of fundamental mathematics courses combining number theory, algebra algebra, analysis and logic. The common denominator of the courses presented is transcendence, either through its classical aspects (transcendence of values of analytic functions, diophantine approximation and geometry of numbers) or functional aspects (differential (differential Galois theory, model theory and its applications to the algebraic independence of solutions of algebraic differential equations, G- and E-functions and hypergeometry).

2. Basic course (24h) - Introduction to transcendental number theory - Boris Adamczewski

Proving that a real or a complex number is transcendental, or even irrational, is usually a difficult task. The same obviously applies to the study of the linear or algebraic relations between several numbers. In transcendental number theory, there are many conjectures but few results. This probably explains the fascination that these problems have held for mathematicians for centuries.

These lectures provide an introduction to transcendental number theory. The aim is to become familiar with some of the basic tools that come up regularly in transcendence proofs (height, Liouville inequality, Siegel lemma, Padé approximants), to give an overview of the classical results related to the exponential function such as the transcendence of numbers e, π, $\ln 2$, i^i or $2^{\sqrt{2}}$, and then to show how these results can be generalised to broader classes of analytic functions by addressing two more complex theories that are the subject of recent advances. The first one is the theory of Siegel E-functions; it concerns the study of the values at algebraic points of analytic solutions of certain linear differential equations. The second one is the theory of Mahler M-functions, in which differential equations are replaced by another type of functional equations. The course proposes to study this second theory in more detail, as well as some of its consequences outside the proper field of transcendental number theory. We will see for example what it brings to the study of the complexity of the sequence of digits in the decimal expansion of $\sqrt{2}$.

Tentative course outline:

1. Diophantine approximation
2. Transcendence and the exponential funcction
3. Hilbert's seventh problem
4. Schneider-Lang theorem
5. Theory of Siegel E-functions
6. Theory of Mahler M-functions

References:

- B. Adamczewski et C. Faverjon, *Méthode de Mahler: relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques*, Proc. London Math. Soc. **115** (2017), 55–90.
- A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 1990.
- F. Beukers, *A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem*, Annals of Math. **163** (2006), 369–379.

- A. B. Shidlovskii, Transcendental numbers, *De Gruyter Studies in Mathematics* **12**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989.
- C. L. Siegel, Transcendental Numbers, Annals of Mathematics Studies **16**, Princeton University Press, 1949.
- M. Waldschmidt, Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **326**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

3. Basic course (24h) - Linear differential equations - Julien Roques

The theory of differential equations is very rich. The problems that arise and/or the tools that are used are related to algebra, analysis, arithmetic, logic, algebraic geometry, etc. In this introductory course, we will focus on linear differential equations. We will cover the following topics :

(1) Introduction to differential Galois theory.
(2) Regular singularities. Monodromy. Riemann-Hilbert correspondence. Density of the monodromy in the differential Galois group.
(3) Study of the (generalized) hypergeometric equations.
(4) Reduction modulo p. p-Curvatures. Grothendieck's p-Curvatures conjecture.
(5) Irregular singularities (if time permits).
(6) Introduction to the theory of difference equations.

References:

- Galois Theory of Linear Differential Equations, M. Singer et M. van der Put, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 328, Springer, 2003.
- Differential Galois Theory, F. Beukers, From Number Theory to Physics, pp 413-439, Springer Berlin Heidelberg.
- Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$, F. Beukers, G. Heckman, Invent. Math. 95 (1989), no. 2, 325–354.

4. Basic course (24h) - Introduction to model theory, ω-stability and o-minimality - Frank Wagner

We propose a 24h course for the first semestre, whose aim is to give an introduction to the two big domains of the applications of modern model theory: ω-stability and o-minimality. These notions have recently found applications in various domains, most notably in diophantine geometry and transcendence theory. Here is a tentative program.

I. Bases.
   - Langage and structures.
   - Formuleas and type spaces.
   - Ultraproducts. The compactness theorem.
   - Élimination of quantifiers.

II. ω-Stability
   - Forking and ranks.
   - ω-stable groups and fields.
   - One-basedness and one-based groups.
   - The trichotomy conjecture.
   - Differentially closed fields.

III. o-Minimality
   - Basic properties of o-minimal structures.
   - Definable groups and fields.
   - The Trichotomy Theorem.
   - The real field with exponentiation.
   - The Pila-Wilkie counting theorem.

Time will not permit to cover all of the above topics. Depending on the prior knowledge of the participant, we shall accelerate treatment of the basics, or drop some of the advanced topics.

A good preparation for the course would be the M1 course "Introduction to set theory and to model theory".

Références:

- Tent/Ziegler: A Course in Model Theory, ASL Lecture Notes in Logic, Series Number 40, 2012
- Pillay: Geometric Stability Theory, Oxford Logic Guides, Clarendon Press, 1996
- van den Dries: Tame topology and o-minimal structures, LMS Lecture Notes Series 248, CUP, 1998
- MacPherson: Notes on o-Minimality and Variations, Model Theory, Algebra, and Geometry, MSRI Publications 39, 2000

5. Advanced course (24h) - Diophantine approximation and transcendence theory - Anthony Poëls

Given $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a direct application of the pigeonhole principle allows to find infinitely many rational numbers p/q such that

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

On the other hand, in 1958 the Field Medal was awarded to K. Roth for the famous following theorem. If α is an (irrational) algebraic number, then for each $\varepsilon > 0$, there are only finitely many p/q satisfying

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

In other words, algebraic numbers are not “well” approximated by rational numbers. This lecture is centered around the very nice Schmidt subspace theorem (1972) as well as some of its many applications in transcendence theory. The aforementioned Roth's theorem is one of them. The original proof of the subspace theorem is based on tools coming from the geometry of numbers. In the first part of the lecture, we will introduce the concepts and results of that theory which are needed. Then, we will study in details Schmidt's proof itself. In the remaining time we will present some applications of Schmidt subspace theorem in transcendence theory.

Course outline:

- Introduction to the geometry of numbers (symmetric convex bodies of $\mathbb{R}^n$, successive minima, Minkowski's theorems, duality, Grassmann algebra, Mahler's compound convex bodies theory).
- Proof of Schmidt subspace theorem.
- Applications of the subspace theorem in transcendence theory (Roth's theorem, transcendental continued fractions, complexity of algebraic numbers, S-unit equations,...)

References:

- Y. Bilu. The many faces of the subspace theorem [after adamczewski, bugeaud, corvaja, zannier...]. *Astérisque*, 317(2007):1–38, 2008.
- J. W. S. Cassels. *An introduction to to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- J.-H. Evertse and H. P. Schlickewei. A quantitative version of the absolute subspace theorem. *J. Reine Angew. Math*, 548:21–127, 2002.
- C. Lekkerkerker. *Geometry of Numbers*, volume VIII of *Bibliotheca mathematica (Amsterdam. 1952)*. Wolter-Noordhoff, 1969.
- W. M. Schmidt. Norm form equations. *Ann. of Math.*, 96(3):526–551, 1972.
- W. M. Schmidt. *Diophantine Approximation*, volume 785 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1980.

6. Advanced course (24h) - An introduction to G-functions - Eric Delaygue

Siegel's E-functions and Mahler's M-functions theories discussed in the first semster successfully transfer the algebraic independence of their functions to that of their values. Many interesting constants, such as the values of Riemann's ζ function at integers arguments, do not appear as values of E-functions nor M-functions but rather as values of Siegel's G-functions. These are also solutions of linear differential equations and a typical example is $\log(1-z)$.

This course is an introduction to the theory of G-functions. We will see through examples that many functions of geometric or combinatorial origins are G-functions. Our first objective will be to describe irrationality results for their values. In particular, we will address Apéry's famous proof of the irrationality of $\zeta(3)$. The second objective of this course will be to describe the results of André, Chudnovsky and Katz on the structure of differential equations satisfied by G-functions. As an extension of the course on linear differential equations of the first semester, we will see how these results lead to an optimal result of Beukers on the algebraic independence of the values of E-functions.

Draft course outline:

- Irrationality of $\zeta(3)$
- G-functions and their values
- Structure of G-operators : the theorem of André–Chudnovsky–Katz
- Irrationality results
- Application to the theory of E-functions

References:

- Y. André, *G-functions and geometry*, Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989. xii+229 pp.
- Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 2, 705–740.
- R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.
- F. Beukers, *A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem*, Ann. of Math. (2) **163** (2006), no. 1, 369–379.
- B. Dwork, G. Gerotto and F. J. Sullivan, *An introduction to G-functions*, Annals of Mathematics Studies, **133**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. xxii+323 pp.

7. Advanced course (24h) - Model theory of differential fields of characteristic zero - Rémi Jaoui

We propose a 24h course during the second semester concerning the applications which have been developed during the last thirty years of a branch of modern model theory — the study of ω-stable theories — to the study of the transcendence properties of the solutions of algebraic differential equations.

The goal of this course will be to introduce the model-theoretic tools central in these applications: the definable Galois theory (Poizat, Pillay,...) on the one side and the study of strongly minimal definable sets on the other side (Zilber, Hrushovski,...) and to describe their relationships with techniques from differential algebra (Kolchin's differential Galois theory and the Nishioka-Umemura properties of irreducibility). The general theory will be illustrated by transcendence statements for the solutions of classical differential equations: the elliptic differential equations, the first Painlevé equation and Picard's equation for example.

Tentative program :

I. Generalities on differential fields
   - Commutative differential algebra.
   - The differentially closed fields and Kolchin's topology.
   - Jet spaces and elimination of imaginaries.
   - The Seidenberg embedding theorem and analytic interpretation.

II. Algebraic differential equations internal to the constants
   - *Preliminaries*: the canonical base of a type and Shelah's reflection principle.
   - Internality to the constants.
   - Binding group and Galois correspondence.
   - Logarithmic differential equations.

III. Strongly minimal algebraic differential equations
   - (Strong) minimality and orthogonality.
   - Irreducibility in the sense of Nishioka-Umemura.
   - The autonomous equations of order one: Rosenlicht's theorem.
   - An example of order two: the first Painlevé equation.

IV. The trichotomy theorem
   - The canonical base property and the first trichotomy theorem.
   - An example: Picard's equation.
   - The second trichotomy theorem and its applications.

References:

- Ed. Elisabeth Bouscaren. Model Theory and Algebraic Geometry: An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture. Lectures Notes in Mathematics, 1696, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- D. Marker, M. Messmer et A. Pillay. Model theory of fields. Lecture Notes in Logic, 5. Association for Symbolic Logic, 2006.
- E.R. Kolchin. Differential algebra and algebraic groups. Pure and Applied Mathematics, Vol 54. Academic Press, New York-London, 1973.
- B. Poizat. Groupes stables. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah[Light of Logic and Knowledge], 2, 1987.