ENS de Lyon
Département de Mathématiques

Master 1 – Mathématiques Avancées

Syllabus for the Courses of the 2nd semester

Equations aux dérivées partielles (6 ECTS): E. Grenier

🇬🇧 Partial Differential Equations

- *Laplace equation*:
resolution of - Laplacian (u) = f in a bounded domain, using functional methods (variational formulation, Sobolev spaces, Lax-Milgram theorem), smoothness, maximum principle (weak and strong).

- *Nonlinear reaction-diffusion equation*:
existence of strong solutions in small time for d_t u - Laplacian (u) = f(u) where f is a smooth given function (approximation by Galerkin method, existence of a solution, regularity, blow up, positivity).

Géométrie différentielle (6 ECTS): M. Mazzucchelli

🇬🇧 Differential geometry

PREREQUISITES: the course of advanced geometry of the 1st semester

PROGRAM:
- Vector bundles
- Introduction to Riemannian geometry:
Riemannian metrics, Riemannian volume form, Divergence of a vector field, Riemannian gradient of a function, Laplace-Beltrami operator, Harmonic functions, Conformal diffeomorphisms, Existence of isothermal coordinates on Riemannian surfaces,
- Connections
- Geodesics, and their variational theory
- Curvature of Riemannian manifolds
- Gauss' Theorema Egregium
- Gauss-Bonnet's Theorem
- A few results concerning conjugate points

Processus stochastiques (6 ECTS): H. Leman

The course will be divided into two main parts:

1. Continuous time Markov chains: Definitions, Markov properties, constructions of the process, Kolmogorov equations, properties of continuous time Markov chains, invariant measures and long time behavior.
2. Brownian motion: Definitions, constructions, convergence of random walks to Brownian motion, Markov properties, martingales associated with Brownian motion, links with the Dirichlet problem".

To follow this course, you must have notions of discrete time random processes (discrete time martingales, discrete time Markov chains...).

Statistiques (6 ECTS): A. Garivier

Prérequis : théorie de la mesure et probabilité (niveau licence). Pas de pré-requis en statistique. C'est un cours de statistique mathématique où il faut une bonne aisance dans les calculs et une bonne maîtrise des bases de proba.

Contenu du cours, on commence (très classiquement) par couvrir à peu près la même chose que le livre suivant : lien html.
Ensuite on fait quelques approfondissements, en se basant sur des textes dans l'esprit des « textes d'agreg » que les étudiants préparent en autonomie.

Surfaces de Riemann (6 ECTS): A. Alvarez

Ce cours est une introduction aux surfaces de Riemann et se concentre dans un premier temps sur le cas des surfaces compactes: la formule de Riemann-Hurwitz et la formule de Plücker du genre des courbes planes seront notamment démontrées. La suite du cours abordera la dualité de Serre et le théorème de Riemann-Roch, ainsi que le théorème d'Abel-Jacobi. Selon le temps disponible, nous démontrerons également le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe.

Les pré-requis sont :
- analyse complexe (obligatoire)
- géométrie de base: variété, fibré tangent (très recommandé)
- théorie des revêtements, groupe fondamental et homologie (très recommandé)

See also here

Théorie des ensembles et théorie des modèles (6 ECTS): F. Wagner

Théorie des ensembles et théorie des modèles
- Théorie des ensembles naive, paradoxe de Russel, axiomes de ZFC, ordinaux, cardinaux, arithmétique des ordinaux et cardinaux, cofinalité,

cardinaux réguliers et singuliers.
- Langages, structures, satisfaction. Ultraproduits et compacité.
Théorème de Löwenheim-Skolem. Types. Oméga-catégoricité et théorème de Ryll-Nardzewski.

--

🇬🇧 Set Theory and Model Theory
- Naive set theory, Russel's Paradox. Axioms of ZFC. Ordinals, cardinals, ordinal and cardinal arithmetic. Cofinality, regular and singular cardinals.
- Languages, structures, satisfaction. Ultraproducts and compactness. Löwenheim-Skolem Theorem. Types. Omega-categoricity and Ryll-Nardzewski Theorem.

Introduction à la théorie des nombres (6 ECTS): A. Thuillier

Programme court :
1. Les corps de nombres et leurs anneaux d'entiers
2. Factorisation idéale des nombres algébriques
3. Groupes des classes et des unités
4. Introduction aux méthodes analytiques

Voir le polycopié détaillé ici (PDF ~0.7 Mo) sur la page du cours.

Topologie algébrique (6 ECTS): M. Mazzucchelli

🇬🇧 ALGEBRAIC TOPOLOGY

Prerequisites: basic notions of general topology (topological spaces, homotopy and fundamental group; we will quickly recap these notions at the beginning of the course)

Program:
Part 1: HOMOLOGY (10 hours)
- CW complexes
- Singular and simplicial homology
- Basic properties of singular homology: homotopy invariance, exact sequences, excision
- Methods of computation: cellular homology, Mayer-Vietories sequence, Künneth formula
- Applications: topological degree, hairy ball theorem, Brower fixed point theorem

Part 2: COHOMOLOGY (10 hours)
- Singular cohomology
- Cup product

- Universal coefficient theorem
- De Rham cohomology
- Poincaré and Alexandre dualities
- Gysin sequences

Part 3: HOMOTOPY (4 hours)
- Homotopy groups
- Whitehead’sTheorem
- Hurewicz theorem
- Eilenberg MacLane spaces
- Homotopic realization of cohomology

REFERENCES :

- Hatcher, Algebraic Topology
- Bott, Tu, Differential Forms in Algebraic Topology