THÉORIE DES NOMBRES ET GÉOMÉTRIE ARITHMÉTIQUE

Nous proposons un parcours de théorie des nombres et géométrie arithmétique, comportant 6 cours de 24h (3 cours fondamentaux et 3 cours avancés). En plus de cela, on peut envisager une semaine de mise à niveau pour les élèves qui n'auraient pas suivi les cours d'introduction à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique en M1.

Premier semestre

(1) Corps locaux (Laurent Berger)
(2) Formes modulaires et formes automorphes (Gabriel Dospinescu)
(3) Cohomologie galoisienne (Philippe Gille)

Deuxième semestre

(1) Cohomologie étale (François Brunault)
(2) Représentations galoisiennes (Sandra Rozensztajn)
(3) Formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Jacquet-Langlands (Olivier Taïbi)

1. Corps locaux

Ce cours est une introduction à l'arithmétique des corps locaux, et en particulier aux corps p-adiques. On abordera la théorie algébrique des corps locaux, la théorie de Galois, l'analyse p-adique, les groupes formels, la théorie du corps de classes local, la théorie de la ramification et le début des périodes p-adiques. D'autres sujets pourront être abordés en fonction des besoins des autres cours.

Références

[1] J. Neukirch, Algebraic Number Theory, Springer Verlag.

2. Formes modulaires et formes automorphes

Le cours proposé est une introduction à la théorie des formes modulaires et des formes automorphes pour GL_2. Ces objets (et leurs généralisations à d'autres groupes) jouent un rôle fondamental dans l'arithmétique moderne, à travers le programme de Langlands. Leur étude est un mélange d'analyse, de théorie des représentations, et d'arithmétique, et le but du cours est d'expliquer les différents points de vue sur ces objets, ainsi que de démontrer un certain nombre de résultats classiques les concernant (finitude, multiplicité 1, lien avec les fonctions L, etc). En fonction du temps, on abordera certains des thèmes ci-dessous :

(1) formes modulaires "classiques" (exemples, applications arithmétiques, fonctions L)
(2) représentations unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ et décomposition de $L^2(\Gamma\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$ pour un sous-groupe discret Γ
(3) représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (exemples, modèles de Kirillov et de Whittaker, foncteur de Jacquet, isomorphisme de Satake)
(4) formes automorphes et adèles : représentations automorphes associées aux formes modulaires, théorie de Hecke, équation fonctionnelle, théorème réciproque de Jacquet-Langlands, théorème de multiplicité 1, etc.

Références

[1] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge University Press 1997.

[2] S. Gelbart, Automorphic forms on adele groups, Annals of Mathematics Studies, Vol. 83

[3] H. Jacquet, R. Langlands, Automorphic forms on GL_2, Lecture notes in mathematics, 1970.

3. Cohomologie galoisienne

La première partie du cours portera sur la cohomologie des groupes, puis la cohomologie galoisienne (commutative et non commutative). Cette théorie, due à Serre/Tate [3], intervient en algèbre, en théorie des nombres, en théorie des représentations...

La seconde partie concernera le cas particulier du groupe de Brauer qui relie les algèbres simples centrales et la cohomologie des groupes de Galois. De façon plus précise, le but du cours sera la classification des algèbres simples centrales au moyen du groupe de cohomologie $H^2(k, \mathbf{G}_m)$. Il s'agit donc essentiellement des quatre premiers chapitres du livre [1]. Nous discuterons en particulier le cas des corps locaux et globaux en lien avec les autres cours.

Références

[1] P. Gille, T. Szamuely, Central simple algebras and Galois cohomology, second edition Cambridge Studies in Advanced Mathematics 165 (2016), Cambridge University Press.

[2] D. Harari, Cohomologie galoisienne et théorie du corps de classes, CNRS Éditions.

[3] J.P. Serre, Cohomologie galoisienne, cinquième édition, révisée et complétée, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag.

4. Cohomologie étale

La cohomologie étale, introduite par Grothendieck et ses collaborateurs dans les années 1960, permet d'associer aux variétés algébriques sur les corps finis des groupes de cohomologie de caractéristique 0, un ingrédient essentiel dans la preuve par Deligne des conjectures de Weil. Elle permet également de construire les représentations galoisiennes associées aux variétés algébriques, et constitue donc un outil fondamental de la géométrie arithmétique.

Le but de ce cours est de donner une introduction à la cohomologie étale des schémas. Nous présenterons les fondements de cette théorie et donnerons comme exemple le calcul de la cohomologie étale d'une courbe sur un corps algébriquement clos. En guise d'application, nous expliquerons l'interprétation cohomologique des fonctions ζ des variétés sur les corps finis, ainsi que la définition des fonctions L associées aux variétés sur les corps de nombres.

Contenu indicatif du cours

(1) Rappels sur la théorie des schémas (notions de lissité, platitude).
(2) Morphismes étales, lien avec les algèbres étales.
(3) Topologies de Grothendieck, (pré)faisceaux abéliens.
(4) Définition de la cohomologie étale, lien avec la cohomologie galoisienne.
(5) Fonctorialité (images directe et réciproque d'un faisceau étale).
(6) Théorème de décomposition.
(7) Cohomologie étale à support, suite exacte longue de localisation.
(8) Calcul de la cohomologie étale d'une courbe.
(9) Interprétation cohomologique des fonctions zêta.
(10) Application : définition des fonctions L.

Références

[1] Qing Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications. MR 1917232

[2] Günter Tamme, *Introduction to étale cohomology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994, Translated from the German by Manfred Kolster. MR 1317816

[3] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 1269324

5. Représentations galoisiennes

L'objectif de ce cours est d'introduire les représentations galoisiennes et leurs déformations. Nous commencerons par introduire la notion de représentations linéaires des groupes de Galois locaux et globaux, et leurs propriétés. Nous présenterons ensuite la notion de déformation de représentations et les anneaux de déformation universels associés. Ces anneaux sont un outil technique important pour beaucoup de questions arithmétiques liées aux représentations galoisiennes et aux formes automorphes.

Références

[1] B. Mazur, An introduction to the deformation theory of Galois representations. In Modular forms and Fermat's last theorem, Springer Verlag

[2] G. Böckle, Deformations of Galois representations. In Elliptic curves, Hilbert modular forms and Galois deformations, 21–115, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser/Springer.

6. Formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Jacquet-Langlands

La formule des traces d'Arthur-Selberg est un outil fructueux du programme de Langlands. Elle exprime la trace d'une fonction test agissant sur un espace de formes automorphes de manière géométrique, en termes d'intégrales orbitales. Ce cours aura pour but de démontrer, en utilisant la formule des traces, un cas de correspondance de Jacquet-Langlands locale entre représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et de $D^\times$ où D est une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}_p$. Ce type de résultat est à la fois motivé par les conjectures de Langlands reliant représentations automorphes et représentations galoisiennes et utile pour établir des cas de correspondance de Langlands dans le sens "automorphe vers Galois".

Références

[1] H. Jacquet et R. Langlands, Automorphic forms on GL_2, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114, 1970

[2] P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, dans Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, 1984