Master de Mathématiques Avancées, seconde année (MA2), année 2018/19

Parcours Théorie des Modèles, Dynamique et Combinatoire

Responsable du parcours : Frank O. Wagner <wagner@math.univ-lyon1.fr>

La théorie des modèles, la dynamique et la combinatoire sont des disciplines traditionnellement éloignés où récemment des interactions importantes se sont développées à travers les méthodes de Baire, la théorie des groupes polonais, les classes de Fraissé, la théorie de Ramsey, la théorie des ultrafiltres, la logique continue et les méthodes non-standard et pseudofinies. Ce parcours vise à présenter aux étudiants ces différents domaines et leurs liens.

Cours fondamentaux (24h CM)

- *Introduction aux systèmes dynamiques topologiques* (Johannes Kellendonk)
- *Dynamique des groupes polonais* (Julien Melleray)
- *Notions de base en théorie des modèles* (Thomas Blossier)

Cours avancés (24h CM)

- *L'algèbre dans la compactification de Stone-Čech d'un semigroupe discret* (Luca Zamboni)
- *Correspondance entre théorie des modèles et dynamique topologique* (Itaï Ben Yaacov)
- *Théorie des modèles avancée et interactions avec la combinatoire* (Frank Wagner)

Cours fondamental 1 : Introduction aux systèmes dynamiques topologiques

Johannes Kellendonk

Les objets de la théorie des systèmes dynamiques topologiques sont des actions de groupes sur des espaces topologiques.
Dans le cas le plus simple, le groupe est $\mathbb{Z}$ et donc l'action donnée par itération d'un homéomorphisme sur l'espace; le groupe peut représenter une évolution temporelle, mais aussi des translations dans l'espace euclidien, ou même être non-abélien. Notre but est d'introduire les notions de base des systèmes dynamiques topologiques, comme on peut le trouver par exemple dans le livre de Kurka, de discuter en détail la proximalité et les notions apparentées (Auslander) et le semi-groupe enveloppant d'Ellis. Nous discutons des applications à la dynamique symbolique, en particulier les sous-décalages (subshift) et les systèmes dynamiques de pavage. Ici, le comportement dynamique est lié aux propriétés physiques du matériau modélisé par le pavage.

Contenu du cours :

- Systèmes dynamiques topologiques : minimalité, récurrence,
- Exemples : systèmes symboliques (suites de substitutions), système d'un pavages
- Facteurs, facteur maximal équicontinu
- Spectre dynamique, lien avec le spectre de diffraction d'un pavage
- Proximalité, proximalité régionale
- Semi-groupe enveloppant d'Ellis : propriétés topologiques, propriétés algébriques
- Exemples de calcul du semigroupe d'Ellis

Références :

- P. Kurka, Topological and Symbolic Dynamical Systems, Cours spécialisés 11, SMF 2013
- J. Auslander, Minimal Flows and their Extensions, Notas de matematica 122, Elsevier Science Publishers B.V., 1988

Cours fondamental 2 : Dynamique des groupes polonais

Julien Melleray

L'objectif de ce cours est d'abord de fournir une introduction à l'utilisation des méthodes de Baire en dynamique topologique, et ensuite d'illustrer les interactions entre théories des modèles, combinatoire infinie et théorie des groupes polonais via des propriétés des classes de Fraïssé et la théorie de Ramsey structurale.

Contenu du cours :

- Espaces polonais, théorème de Baire, théorèmes de Laverentieff et Alexandrov
- Théorème de Sierpinski (l'image d'un espace polonais par une surjection ouverte est un polonais)
- Ensembles Baire mesurables, enveloppe d'un ensemble Baire mesurable.
- Théorème de Kuratowski-Ulam.
- Groupes polonais: exemples, premières propriétés; distances compatibles, quotients.
- Lois du 0-1 topologique; exemple d'ensemble non Baire mesurable: un ultrafiltre non principal (vu comme sous-ensemble de l'espace de Cantor)
- Premières applications du théorème de Baire à la dynamique: critères pour l'existence d'orbites denses/génériques.
- Groupes polonais nonarchimédiens, liens avec les groupes d'automorphismes de structures dénombrables.
- Premiers liens entre propriétés modèle-théoriques et propriétés du groupe d'automorphismes
- Classes de Fraïssé, structures homogènes, propriété de Ramsey.
- Théorème de Kechris-Pestov-Todorcevic caractérisant les groupes polonais nonarchmédiens extrêmement moyennables en termes de théorie de Ramsey

Cours fondamental 3 : Notions de base en théorie des modèles

Thomas Blossier

Nous présenterons dans ce cours les notions et outils classiques de théorie des modèles, qui seront un prérequis pour les cours avancés du second semestre « Correspondance entre théorie des modèles et dynamique topologique » et « Théorie des modèles avancée et interactions avec la combinatoire ». Selon l'avancement du cours, on fera une introduction à certaines notions de stabilité, qui pourront également être utiles pour les deux cours avancés précités.

Aucune connaissance préalable en logique mathématique n'est requise pour ce cours, mais suivre le cours de théorie des ensembles et théorie des modèles du master 1 en est une bonne préparation.

Contenu du cours :

- Structures, groupe d'automorphismes.
- Formules du 1er ordre et théories. Va-et-vient. Equivalence et inclusion élémentaire. Critère de Tarski-Vaught.
- Ultraflitres, ultraproduits, théorème de compacité, théorème d'Ax.
- Types et espaces topologiques des types. Modèles saturés, modèles homogènes, modèles universels.
- Elimination des quanteurs. Corps algébriquement clos. Corps réels clos.
- Limites de Fraïssé, exemples.
- Théorème d'omission des types, théorie $\aleph_0$-catégorique et le groupe d'automorphismes de son modèle dénombrable, modèles premiers.
- Introduction à des notions de stabilité (voire de néo-stabilité).

Cours avancé 1 : L’algèbre dans la compactifications de Stone-Čech d’un semigroupe discret

Luca Zamboni

La loi interne d’un semigroupe discret S se prolonge naturellement à la compactification de Stone-Čech βS (considérée comme l’ensemble des ultrafiltres sur S) de telle sorte que βS devient un semi-groupe semi-topologique compact avec S contenu dans son centre topologique. L’´ etude du semigroupe βS, et en particulier des riches interactions entre l’algèbre et la topologie sous-jacentes, intéressent les mathématiciens de différents domaines : dynamique topologique, théorie ergodique, combinatoire, théorie combinatoire et additive des nombres et théorie descriptive des ensembles. Même dans le cas de l’ensemble ℕ des nombres naturels, le semigroupe βℕ possède une structure algébrique d’une complexité extraordinaire. Le cours se concentrera principalement sur les applications de l’algèbre de βS à la théorie de Ramsey.

La théorie de Ramsey est un domaine des mathématiques qui s’intéresse à la recherche d’ordre au sein des systèmes. De nombreux résultats classiques de la théorie de Ramsey étaient à l’origine motivés par des applications dans d’autres domaines : le Lemme de Schur à la théorie des nombres, le Théorème de Ramsey à la logique et le Théorème de Hales-Jewett à la théorie des jeux. Peut-être l’exemple le plus frappant d’une application de l’algèbre de βS à la théorie de Ramsey est la preuve de Galvin et Glazer du Théorème de Hindman. Ils ont montré que le Théorème de Hindman est une conséquence directe de l’existence dans βℕ d’ultrafiltres idempotents.

Les propriétés algébriques de βS ont aussi de nombreuses applications à la partie de la théorie de Ramsey qui s’intéresse aux structures inévitables présentes dans des systèmes de densité positive : le Théorème de Szeméredi, le Density Hindman Theorem, et le Central sets Theorem de Furstenberg. Ces derniers résultats exploitent aussi les interactions entre l’algèbre de βS et la dynamique topologique. D’une part les propriétés algébriques de βS ont des conséquences sur le comportement dynamique des systèmes dynamiques topologiques définis sur le semigroupe S. Et inversement, diverses notions provenant de la théorie des systèmes dynamiques topologiques (récurrence, syndicité et syndicité par morceaux) sont importants pour décrire des propriétés algébriques.

Contenu du cours :

- La compactification de Stone-Čech d’un semigroup discret
- Ideaux et commutativité dans β
- La théorie de Ramsey
- Applications de l’algèbre de βS à la théorie de Ramsey
- Systèmes dynamiques minimaux et le Central Sets Theorem

Références :

- V. Bergelson, Ergodic Ramsey theory-an update, London Math. Soc. Lecture Note Series 228 (1996), 1-61.
- V. Bergelson, Minimal idempotents and ergodic Ramsey theory, Topics in Dynamics and Ergodic Theory 8-39, London Math. Soc. Lecture Note Series 310, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- H. Furstenberg, Recurrence in ergodic theory and combinatorical number theory, Princeton University Press, Princeton, 1981.
- N. Hindman, D. Strauss, Algebra in the Stone-Čech compactification theory and applications, second edition, de Gruyter, Berlin, 2012.

Cours avancé 2 : Correspondance entre théorie des modèles et dynamique topologique

Itaï Ben Yaacov

Nous allons traiter d'un cadre général dans lequel une structure mathématique peut être (presque) reconstruite à partir de son groupe d'automorphismes, et dans lequel des propriétés de la structure (telle que l'existence d'une notion d'indépendance, similaire à l'indépendance linéaire dans les e.v.) sont équivalentes à des propriétés dynamiques du groupe en question. Ces correspondances entre notions fondamentales de la théorie des modèles d'un côté et de la dynamique de l'autre côté, au-delà de leur intérêt intrinsèque, se prêtent à des applications aussi bien du côté modèle-théorique que du côté dynamique.

Contenu du cours :

- Logique pour structures métriques (logique continue).
- Théorème d'omission des types, théories séparablement catégoriques.
- Le groupe d'automorphismes d'une structure séparablement catégorique. Groupes polonais Roelcke-précompacts. Le système dynamique associé. Reconstruction d'une structure aleph0-catégorique.
- Théorème d'échangeabilité des limites de Grothendieck. Stabilité modèle-théorique, indépendance, exemples. Correspondance WAP == stable == représentable dans un Banach reflexif.
- La propriété d'indépendance, théories et formules NIP. Correspondance Tame == NIP == représentable dans un Banach de Rosenthal.

Selon l'avancement, on pourra élaborer certaines applications et exemples, ou discuter du phénomène de stabilité en dehors du contexte $\aleph_0$-catégorique.

Cours avancé 3 : Théorie des modèles avancée et interactions avec la combinatoire

Frank Wagner

Bien que les définitions de base de la théorie des modèles moderne soient de nature combinatoire (stabilité, dépendance, etc.), jusqu'il y à une dizaine d'années il y a eu relativement peu de contact entre les deux domaines. Depuis, les interactions se multiplient : des applications par Hrushovski des méthodes de la stabilité aux structures pseudofinies et la combinatoire additive aux méthodes non-standard en théorie des nombres combinatoire, ou les améliorations du lemme de régularité de Szemérédy sous des hypothèses supplémentaires modèle-théoriques.

Contenu du cours :

- Stabilité et néostabilité modèle-théoriques, dépendance et NTP_2, lemme de régularité de Szemeredy.
- Structures pseudofinies; mesure et dimension pseudofinies, lemme du stabilisateur
- Théorie des nombres combinatoire non-standard