Master 2 de Mathématiques Avancées (MA2) en 2018-2019

Parcours Géométrie et actions de groupes

À l'origine, la théorie des groupes de Lie traitait des groupes continus de transformations des variétés différentiables. Cette théorie est aujourd'hui bien comprise, en particulier grâce à la classification au début du vingtième siècle des groupes de Lie semi-simples. D'autre part, en particulier sous l'impulsion de Klein, la théorie des réseaux dans les groupes de Lie, initialement motivée par la théorie des nombres, s'est également développée de manière spectaculaire. Par exemple, Margulis est parvenu à montrer que tous les réseaux en rangs supérieurs ont une origine arithmétique. Il a aussi réussi à décrire tous les plongements des réseaux dans les groupes de Lie. Les méthodes employées sont a priori surprenantes puisqu'elles mettent en jeu la théorie ergodique.

Dans les années 1970, Zimmer a proposé un programme pour étudier les actions de réseaux sur les variétés par difféomorphismes. Il s'agit en quelque sorte d'aller plus loin que Margulis en décrivant les plongements des réseaux, non plus dans les groupes de Lie, de dimensions finies, mais dans des groupes de difféomorphismes. Après plusieurs décennies de résultats partiels, un progrès majeur a été accompli récemment par Brown, Fisher et Hurtado, qui répondent “presque complètement” à la question. Un séminaire Bourbaki, par Serge Cantat, datant d'octobre 2017, a fait le point sur ce programme.

Le but de ce projet de M2 est de permettre à l'étudiant d'entrer dans ce domaine de recherche.

Les trois cours fondamentaux au premier semestre poseront les bases de théorie des groupes de Lie, des réseaux, et de la théorie ergodique. Ils constituent un pilier important pour l'étude de la géométrie et des systèmes dynamiques en général, et ne sont pas uniquement destinés aux étudiants qui souhaitent se diriger vers le programme de Zimmer.

Les trois cours du second semestre sont plus spécialisés, même si les deux premiers ont également leur autonomie propre. Le dernier cours sera enseigné par Serge Cantat qui présentera en fait son exposé au séminaire Bourbaki sous forme "diluée". Ce dernier cours, bien que dilué, sera intense dans le sens qu'il sera concentré sur une période de deux semaines. On envisage d'associer un petit colloque à ces deux semaines, où seront invités des spécialistes du sujet, ce qui permettra aux étudiants ayant suivi le cours d'entrer directement dans une thématique de recherche actuelle.

Ce projet comporte trois cours fondamentaux au premier semestre, et trois cours avancés au second semestre. Chaque cours fait 24h CM et compte pour 6 ECTS :

Cours fondamentaux :

- Groupes de Lie, Yves de Cornulier et Bruno Sévennec
- Réseaux dans les groupes de Lie, Mikael de la Salle et Jean-Claude Sikorav
- Théorie ergodique, Damien Gaboriau et Étienne Ghys.

Cours avancés :

- Théorie de Pesin-Ratner, Pierre Dehornoy et Abdelghani Zeghib
- Actions de réseaux en dimension un et deux, Adrien Le Boudec et Jean-Claude Sikorav
- Actions de réseaux de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ en dimension $< n$, par Serge Cantat.

Groupes de Lie

Cours fondamental, Yves de Cornulier et Bruno Sévennec

Il s'agit d'un cours d'introduction aux groupes et aux algèbres de Lie.

Programme :

- Groupes topologiques ; espaces homogènes
- Définition d'un groupe de Lie. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie, fonctorialité
- Algèbres de Lie ; formule de Baker-Campbell-Hausdorff
- Théorèmes de Lie
- Généralités sur les algèbres de Lie de dimension finie en caractéristique zéro: résolubilité, nilpotence, radical, représentations, forme de Killing, semi-simplicité et ses caractérisations
- Représentations de $\mathfrak{sl}_2$
- Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers
- Systèmes de racines, classification des algèbres de Lie simples sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro (on énoncera la liste dans le cas réel, ayant fait introduire les algèbres de Lie en question – au moins les classiques – en exercice)

Références :

- Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978
- Varadarajan: Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice HAll, 1974
- Bourbaki, groupes et algèbres de Lie.

Réseaux dans les groupes de Lie

Cours fondamental, Mikael de la Salle et Jean-Claude Sikorav

Ce cours est une introduction aux réseaux dans les groupes de Lie, c'est-à-dire aux sous-groupes $\Gamma \subset G$ tel que le quotient G/Γ est de volume fini.

Programme :

- Mesure de Haar sur un groupe de Lie
- Réseaux de $\mathbf{R}^n$
- Exemples de réseaux venant de la géométrie
- Exemples de réseaux venant de la théorie des nombres
- Théorème de densité de Borel
- Représentations unitaires et propriété (T)
- Introduction à la rigidité.

Prérequis : variétés différentielles.

Références :

- Y. Benoist, Five lectures on lattices in semisimple Lie groups, 2004
- Y. Benoist, Réseaux des groupes de Lie, 2008
- D. W. Morris, Introduction to Arithmetic Groups, 2001
- M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups (Springer, Berlin, 1972).

Les trois premières sont des notes disponibles sur les pages internet de leurs auteurs.

Théorie ergodique

Cours fondamental, Damien Gaboriau et Étienne Ghys

Ce cours présentera les bases de la théorie ergodique.

Programme :

- Mesures invariantes et récurrence.
- Existence de mesures invariantes.
- Théorèmes ergodiques.
- Ergodicité et décomposition ergodiques.
- Entropie et principe variationnel.
- Inégalités de Ruelle.

Référence :

- M. Viana et K. Oliveira, *Foundations of ergodic theory*, Cambridge Univ Press 2016.

Théorie de Pesin-Ratner

Cours avancé, Pierre Dehornoy et Abdelghani Zeghib

Le premier but est de présenter certains résultats avancés de théorie ergodique concernant l'entropie et les exposants de Lyapunov. En particulier on insistera sur la théorie de Pesin, l'inégalité de Pesin et l'égalité de Ledrappier-Young (qu'on démontrera dans le cas des surfaces).

Ensuite, on introduira les théorèmes de Marina Ratner sur les flots unipotents sur les espaces homogènes, et sur certaines applications frappantes. Sans démontrer ces résultats dans toute leur généralité, on traitera des cas riches comme celui de SL(2,**R**).

Références :

- R. Mañe , Ergodic Differentiable Dynamics, Springer Ergebnisse, 1987.
- D. W. Morris, Ratner's Theorems on Unipotent Flows, Chicago Lectures in Math, 2005).

Actions de réseaux en dimension un et deux

Cours avancé, Adrien Le Boudec et Jean-Claude Sikorav

Il s'agit de présenter divers exemples, sur la droite, le cercle ou les surfaces, où l'on peut montrer qu'une action de SL(n,Z) ou plus généralement d'un réseau de rang supérieur factorise à travers un groupe fini. Et plus généralement d'étudier les propriétś géométriques des actions de groupes dénombrables.

Programme indicatif

- Propriétés des actions de groupes dénombrables en dimension un
- Actions et non-actions de réseaux sur le cercle
- Actions de groupes préservant l'aire sur les surfaces
- Contraintes sur les actions de groupes dénombrables sur les surfaces

Références :

- J. Franks, M. Handel, Distortion elements of group actions on surfaces, Duke Math. J 2006
- J. Franks, M. Handel, Area preserving group actions on surfaces, Geom. Topol. 2003
- E. Ghys, Actions de réseaux sur le cercle, Invent. Math, 1999
- D. W. Morris, Some arithmetic groups that do not act on the circle, Amer. Math. Soc. 2014
- A. Navas, Groupes of circle diffeomorphisms, Chicago Univ. Press 2009.

Actions de réseaux de $\mathbf{SL}(n, \mathbf{R})$ en dimension $< n$

Cours avancé, Serge Cantat

Le but de ce cours est de montrer qu'un réseau co-compact du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ ne peut pas agir fidèlement par difféomorphismes sur une variété compacte de dimension inférieure à $n-1$ (théorème de A. Brown, D. Fisher et S. Hurtado, 2016). Il s'agit de combiner des arguments de systèmes dynamiques (entropie, action de groupes sur les variétés homogènes), de théorie des groupes de Lie, et d'analyse harmonique (propriété (T) et ses renforcements).

Programme indicatif

- Actions de groupes de Lie par homéomorphismes sur une variété, actions de groupes dénombrables sur les surfaces
- Le problème de Burnside pour les groupes de difféomorphismes de S^2 préservant l'aire
- Utilisation de la propriété (T) renforcée : actions à faible croissance des dérivées, métriques riemanniennes invariantes
- Formules de Ledrappier-Young et de Pesin ; inégalité de Ruelle, cas d'égalité.
- Preuve du théorème de Brown, Fisher et Hurtado
- Si le temps le permet : le cas des groupes de transformations birationnelles.

Références

- A. Brown, D. Fisher, S. Hurtado, *Zimmer conjecture: subexponential growth, measure rigidity, and strong property (T)*, arXiv:1608.04995 (2016).
- S. Hurtado, *The Burnside problem for* $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(S^2)$, arXiv:160704603 (2016)
- F. Ledrappier, L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms, I and II*, Ann. Math. 122 (1985).