Master de Mathématiques Avancées, 2ème année

Année 2018-2019

Parcours "ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS"

Ce parcours vise à préparer les étudiants à la recherche dans le domaine de l'analyse théorique et numérique de problèmes faisant intervenir des équations aux dérivées partielles (EDP). Il comporte trois volets :

• une phase de remise en forme concentrée sur 2,5 semaines ayant pour but de garantir un socle de connaissances commun à des étudiants issus de formations mathématiques variées (normaliens, universitaires, ingénieurs). Cette remise en forme est optionnelle mais très fortement conseillée.

• trois cours de base qui offrent une vaste introduction aux techniques d'analyse des grandes classes d'équations aux dérivées partielles et à l'approximation discrète de leurs solutions.

• trois cours avancés sur des sujets en lien étroit avec la recherche actuelle : l'analyse des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides, la modélisation à l'aide d'EDP de phénomènes biologiques et l'analyse de ces modèles, et enfin, une introduction à la mécanique statistique et à la théorie cinétique des gaz.

1 Cours de remise en forme

RF1 – Introduction aux EDP linéaires (Petru Mironescu, 16h)

1. Principe du maximum de Hopf pour les équations elliptiques d'ordre deux. Application à l'unicité.
2. Méthode de Perron pour l'équation de Laplace. Fonctions barrières, existence et unicité.
3. Théorème de Hille-Yosida. Formule de Duhamel. Application à des équations du type de la chaleur.

RF2 – Outils d'analyse pour les EDP (Laure Saint-Raymond, 16h)

1. Espaces L^p, topologies forte, faible et faible-* ;
2. Distributions, et solutions faibles d'EDP ;
3. Transformée de Fourier et espaces de Sobolev ;
4. Opérateurs compacts et opérateurs maximaux monotones.

RF3 – Outils stochastiques (Charles-Edouard Bréhier, 10h)

1. Martingales en temps discret ; théorèmes d'arrêt, théorèmes de convergence. Extensions pour les martingales en temps continu ;
2. Construction du mouvement brownien. Régularité des trajectoires.
3. Quelques propriétés des trajectoires browniennes. Liens avec l'équation de la chaleur.

2 Cours fondamentaux

CF1 – Équations elliptiques (Louis Dupaigne, 24h)

1. Principes du maximum
   (a) Cas du laplacien : formules de la moyenne, principe du maximum, inégalité de Harnack, théorème de Liouville, lemme du point frontière de Hopf ;
   (b) Opérateurs elliptiques : généralités et généralisations, valeur propre principale ;
   (c) Principe du maximum sur les domaines fins, méthode des hyperplans/hypersphères mobiles
2. Équations uniformément elliptiques linéaires
   (a) Rappels succincts sur la résolution des problèmes variationnels au sens faible ;
   (b) Fonctions harmoniques : régularité intérieure, résolution du problème de Dirichlet (sur la boule par la méthode des fonctions de Green, sur un domaine lisse par la méthode de Perron). Estimations gradient par la méthode de Bernstein ;
   (c) Théorie de Schauder : résolution du problème de Dirichlet sur la boule, estimations a priori pour les solutions lisses, méthode du gel des coefficients, existence de solutions lisses (méthode de continuité), caractérisation de Campanato des fonctions hölderiennes.
3. Équations elliptiques semilinéaires : l'exemple des solutions extrémales
   (a) Solutions stables : forme globale du théorème des fonctions implicites, méthode des sous et sursolutions, solution minimale, méthode directe du calcul des variations ;
   (b) Solutions extrémales : solutions faibles L^1, méthodes de *blow-up* et de *blow-down*, notions sur l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère, formule de monotonie ;
   (c) Théorème de bifurcation de Crandall-Rabinowitz, réduction de Liapounov-Schmidt, indice de Fredholm.
   (d) Lemme du col.
4. Équations elliptiques quasilinéaires : l'exemple du problème de Plateau
   (a) Méthodes itératives : inégalité de Cacciopoli, itération de Moser et théorème de De Giorgi-Nash-Moser ;
   (b) Méthode de continuité non-linéaire, théorème du point fixe de Schauder.

CF2 – Équations d'évolution (Francesco Fanelli, 24h)

1. Introduction
   (a) Classification des EDP, définitions basiques ;
   (b) EDP d'évolution : caractère bien posé, solutions fortes et faibles.
2. Équations paraboliques
   (a) Équation de la chaleur : solution fondamentale, principe du maximum, méthodes d'énergie ;

   (b) Cas général : existence de solutions faibles, régularité, unicité ; principes du maximum et inégalité d'Harnack.
   (c) Un exemple non-linéaire : l'équation KPP
3. Équations de transport
   (a) Méthode des caractéristiques ;
   (b) Solutions L^p, solutions H^s ;
   (c) Retour sur la méthode des caractéristiques : équations des ondes en dimension 1, introduction aux équations d'Hamilton-Jacobi et aux lois de conservations.
4. Équations et systèmes hyperboliques
   (a) Équations des ondes : formules explicites, méthodes d'énergie ;
   (b) Équations des ondes à coefficients réguliers ;
   (c) Systèmes hyperboliques symétrisables (au sens de Friedrichs) ;
   (d) Équations et systèmes quasi-linéaires.
5. Éléments de la théorie des semi-groupes
   (a) Définitions basiques ;
   (b) Théorème de Hille-Yosida ;
   (c) Applications aux équations paraboliques et hyperboliques.
6. Deux classes d'équations non-linéaires du premier ordre
   (a) Équations d'Hamilton-Jacobi ;
   (b) Lois de conservation.
7. Introduction aux équations dispersives
   (a) Équations de Schrödinger et NLS
   (b) Solution linéaire, effet de dispersion, comportement asymptotique.

CF3 – Approximations numériques des équations aux dérivées partielles (Khaled Saleh, 24h)

1. Équations paraboliques (équation de la chaleur sur un parallélépipède) et méthodes de différences finies.
   (a) Rappels sur l'équation de la chaleur.
   (b) Schéma explicite : consistance, stabilité, convergence en norme L^∞.
   (c) θ-schéma : consistance, stabilité, convergence en norme $L^\infty(0,T,L^2)$.
   (d) Théorème d'équivalence de Lax.
   (e) Quelques autres équations et schémas de différences finies (équations dispersives si le temps le permet).
2. Équations elliptiques et méthodes d'éléments finis.
   (a) Applications du théorème de Lax-Milgram et quelques rappels.

(b) Approximation interne, lemme de Céa,

(c) Interpolation dans H^2 et ordre de convergence dans H^1.

(d) Lemme d'Aubin-Nitsche et ordre de convergence dans L^2.

3. Équations hyperboliques non linéaires et schémas de volumes finis.
   (a) Équations de transport et méthode des caractéristiques.
   (b) Équations scalaires non linéaires, solutions faibles, relations de Rankine-Hugoniot.
   (c) Solutions au sens de Krushkov (unicité de la solution).
   (d) Schémas monotones et convergence (existence de la solution).

3 Cours avancés

CA1 – Méthodes mathématiques pour les équations de Navier-Stokes (Lorenzo Brandolese, 24h)

Ce cours est consacré à un modèle fondamental de la mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes. Nous verrons une large palette de méthodes pour étudier ces équations (méthodes de compacité, de point fixe, décompositions dyadiques, Fourier-splitting, estimations bilinéaires, etc.). Au delà des questions classiques de l'existence de solutions faibles et de la construction de solutions fortes uniques, nous étudierons en détail les problèmes que posent le comportement des solutions en temps grand et le comportement asymptotique des solutions à longue distance. La dernière partie du cours est une ouverture à l'étude de systèmes plus compliqués de la mécanique des fluides où le champ de vitesse est couplé à d'autres quantités physiques (température, champ magnétique, etc.).

1. Solutions d'énergie finie
   (a) Les solutions faibles de Leray ;
   (b) Quelques questions de régularité des solutions faibles ;
   (c) Le problème de la dissipation de l'énergie. Méthodes de Fourier Splitting ;
   (d) Profils asymptotiques.
2. Solutions *mild*
   (a) Solutions de Kato et leur unicité dans certains espaces critiques ;
   (b) Autres espaces invariants par changement d'échelle : espaces de Besov et oscillations des solutions ;
   (c) Cas limites : le théorème de Koch-Tataru et les phénomènes d'inflation de norme ;
   (d) Explosion en temps fini pour des équations "de type Navier-Stokes".
   (e) Solutions autosimilaires.
3. Comportement asymptotique pour $|x| \to +\infty$
   (a) Théorème de Miyakawa.
   (b) Encadrement ponctuel des solutions.
4. Introduction à d'autres modèles de la mécanique des fluides
   Écoulement géophysique et approximation de Boussinesq. Magnétohydrodynamique.

CA2 – Application des EDP à la biologie (Vincent Calvez, 24h)

L'objectif du cours est d'aborder plusieurs champs de la biologie du point de vue de la modélisation mathématique, et plus précisément par l'utilisation d'équations aux dérivées partielles. Les modèles EDP ont été utilisés avec succès pour décrire des populations structurées en espace, en âge, en trait phénotypique, etc... Nous passerons en revue certains modèles fondateurs, et certains modèles plus récents, avec comme applications possibles : les invasions d'espèce, les mouvements collectifs ou encore les équilibres sélection-mutation en biologie évolutive. L'analyse mathématique fera appel à un grand nombre d'outils mathématiques vus dans les cours du premier semestre. Des outils spécifiques seront développés au fur et à mesure du cours.

1. Équations de réaction-diffusion en écologie spatiale
   (a) L'équation de Fisher et les phénomènes de propagation.
   Existence d'ondes progressives ; propagation à vitesse constante pour le problème de Cauchy.
   Cas d'étude : migration d'une population suite à un changement d'environnement, d'après Berestycki et al, Bull Math Biol (2009).

   (b) Modèles cinétiques pour la propagation d'espèces : mouvements collectifs et phénomènes d'accélération.
   Existence d'ondes progressives ; propagation à vitesse constante pour le problème de Cauchy. Accélération dans le cas d'une distribution des vitesses à support non compact.
2. Équations de réaction-diffusion pour la biologie évolutive
   (a) L'équation de mutation sélection et les phénomènes de concentration.
   Analyse asymptotique dans le cas d'une petite variance de mutations ; convergence vers une équation de Hamilton-Jacobi avec contrainte ; existence et unicité dans le cas d'une fonction de sélection convexe.

   (b) Le modèle infinitésimal.
   Analyse asymptotique ; limite hydrodynamique.
   Cas d'étude : adaptation d'une population à un changement d'environnement.

   (c) L'influence de la migration sur les équilibres évolutifs.
   Cas d'un système couplé entre deux zones géographiques. Phénomènes de spéciation.
3. Exemples de synthèse écologie/évolution
   (a) Stratégies de migration et d'adaptation pour suivre le changement climatique.
   Ondes progressives pour un sytème de réaction-diffusion hétérogène en espace et en trait phénotypique. Modèle de Kirkpatrick et Barton.

   (b) Évolution de la dispersion au sein d'un front d'invasion.
   Existence d'ondes progressives pour des coefficients de diffusion bornés ; phénomène de tri en espace ; accélération des ondes dans le cas non compact.

CA3 – Limites d'échelle et théorie cinétique (Sergio Simonella, 24h)

La théorie cinétique initiée par Boltzmann réalise, dans le cas du gaz raréfié, le programme de la connexion rigoureuse entre modèles d'équations macroscopiques et modèles d'interaction à l'échelle de l'atome. L'objet de ce cours est de présenter dans un premier temps des résultats fondamentaux de la théorie de l'équilibre, puis des théorèmes hors équilibre d'intérêt actuel.

1. Systèmes à l'équilibre
   (a) Ensembles statistiques, problème de l'équivalence ;
   (b) Fonctions thermodynamiques et équations d'état ; gaz parfait ;
   (c) Modèles d'interaction stables et superstables ;
   (d) Limite thermodynamique et mesures de Gibbs ;
   (e) Hypothèse d'ergodicité ;
2. Théorie cinétique
   (a) Limites d'échelle de Vlasov, Boltzmann et Landau ;
   (b) Gaz de Lorentz, sphéres dures : loi des grands nombres et équation de Boltzmann ;
   (c) Méthode de hiérarchie de corrélations ;
   (d) Irréversibilité, entropie ;
   (e) Théorème central limite, équation de Boltzmann fluctuante.