Parcours M2 "Probabilités", 2018/19

Le parcours s'articule autour des 3 cours fondamentaux suivants (20h+6h TD)

- Calcul Stochastique, par Emmanuel Jacob,
- Physique Statistique, par Oriane Blondel,
- Marches aléatoires sur les graphes, par Grégory Miermont,

et des 3 cours avancés suivants (24h)

- Phénomènes de grande dimension, par Guillaume Aubrun,
- Modèles de dimères, par Fabio Toninelli,
- Probabilités intégrables, par Jérémie Bouttier.

Ce parcours propose ainsi trois orientations assez complémentaires. Les cours de Calcul Stochastique et celui de “phénomènes de grande dimension” donnent un aperçu des liens entre les probabilités et l'analyse, notamment le phénomène de concentration de la mesure, et pourraient intéresser aussi les étudiants du parcours EDP. Le cours "Physique Statistique" et le cours sur les marches aléatoires donnent un aperçu d'une partie importante des probabilités discrètes, et amènent à une large variété de thématiques dont la géométrie aléatoire, la physique statistique hors équilibre, les marches aléatoires. Finalement, les cours avancés sur les modèles de dimères et sur les “probabilités intégrables” ont un lien fort à la fois avec la physique statistique et avec la combinatoire; ils permetteront de toucher à des sujets en pleine effervescence, tels les modèles de croissance de la classe d'universalité KPZ, les processus déterminantaux et le lien entre pavages aléatoires et champ libre Gaussien.

Calcul Stochastique

Cours fondamental, Emmanuel Jacob

Ce cours présentera l'essentiel des outils permettant de construire et d'étudier les processus stochastiques continus en temps continu. Dans ce bestiaire, l'exemple maître est le mouvement brownien, mais on sera très vite amenés à rencontrer les martingales, puis les semimartingales, une famille riche de processus pour laquelle on peut développer un calcul différentiel et intégral, et résoudre certaines équations différentielles stochastiques.

La motivation de l'étude des équations différentielles stochastiques vient de la volonté de décrire le comportement global de processus aléatoires dont l'évolution infinitésimale obéit à certaines équations. Comme il s'agit de processus aléatoires, ces équations ne sont pas des équations différentielles (ou EDP) ordinaires, mais incorporent un bruit aléatoire, un accroissement infinitésimal de mouvement brownien. Le problème principal de leur étude vient de ce que le mouvement brownien, et par suite les autres processus que l'on veut décrire, a des trajectoires trop irrégulières (non dérivables, par exemple) pour que le calcul différentiel/intégral usuel ait un sens.

Face à cet obstacle, nous développerons une notion d'intégrale éminemment stochastique, l'intégrale d'Itō. Elle donnera lieu à un calcul intégral particulier, dans lequel la formule d'Itō fournit une intégration par parties d'un nouveau genre. Ce calcul intégral nous permettra d'étudier les équations différentielles stochastiques pour les semimartingales continues, et apportera également un éclairage nouveau sur ces processus, par exemple avec le théorème de caractérisation de Lévy.

La participation au cours de remise à niveau "Outils stochastiques " en tout début d'année pourra faciliter le suivi de ce module.

Contenu :

- Processus à temps continu. Lemme de Kolmogorov, régularisation.
- Construction du mouvement brownien
- Martingales, martingales locales, théorèmes d'arrêt
- Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale
- Formule d'Itō et applications
- EDS

Références :

- Karatzas-Shreve: Brownian motion and stochastic calculus
- Le Gall: Mouvement brownien et calcul stochastique
- Revuz-Yor: Continuous martingales and Brownian motion
- Varadhan: Stochastic processes

Mécanique statistique

Cours fondamental, Oriane Blondel

En *mécanique statistique*, on modélise des systèmes physiques par un grand nombre de composants microscopiques qui interagissent aléatoirement de façon simple. On cherche alors à comprendre comment ces propriétés microscopiques élémentaires peuvent générer des phénomènes macroscopiques intéressants comme une transition de phase ou une brisure spontanée de symétrie. Cela a donné lieu au développement d'une branche importante de la théorie des probabilités, et le but de ce cours est de donner un aperçu des méthodes et outils qui y sont utilisés. Pour cela, nous étudierons trois modèles fondamentaux : la percolation, le modèle d'Ising et les polymères aléatoires.

Contenu du cours

1. Percolation
    - Définition, transition de phase
    - Inégalité FKG, $p_c = 1/2$
    - Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique
    - Théorème de Russo-Seymour-Welsh pour la percolation critique
2. Modèle d'Ising
    - Définition, inégalités de décorrélation
    - Limite thermodynamique, énergie libre, transition de phase
    - Basse température et argument de Peierls
    - Unicité à haute température
3. Polymères aléatoires
    - Définition, énergie libre
    - Désordre faible/fort
    - Comportement diffusif
    - Localisation

Références

[1] W. Werner, Percolation et modèle d'Ising, SMF 2005.
[2] Y. Velenik, Introduction aux champs aléatoires markoviens et gibbsiens, http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2006-2007/Gibbs/gibbs.pdf.
[3] F. den Hollander, Random polymers, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXVII - 2007.

Marches aléatoires sur les graphes

Cours fondamental, Grégory Miermont

Une chaîne de Markov réversible peut être vue comme une marche aléatoire sur un graphe pondéré, dont la géométrie peut permettre de décrire précisément le comportement de la marche, et vice-versa. Ce cours propose une étude de ces marches, et notamment la caractérisation de la récurrence et de la transience, par les propriétés électriques du graphe, et le lien entre ces propriétés et certains objets aléatoires naturels définis sur le graphe, comme les marches à boucles effacées, les arbres couvrants uniformes, le champ libre gaussien, etc. Nous discuterons quelques exemples-type de comportement de marches aléatoires sur les arbres, les graphes de Cayley. Après quelques séances d'introduction à la théorie ergodique, on sera ensuite amené à étudier les marches aléatoires sur des graphes eux-mêmes aléatoires : arbres et graphes unimodulaires. Si le temps le permet, on se penchera plus spécifiquement sur le cas des graphes planaires.

Contenu du cours :

1. Marches aléatoires et réseaux électriques
   - Forme de Dirichlet discrète, énergie
   - Caractérisation du comportement asymptotique par la résistance du réseau.
   - Le cas des marches aléatoires sur les arbres, exemples
   - Arbres couvrant uniforme d'un graphe, matrix-tree theorem
   - Champ libre gaussien sur un graphe
2. Rudiments de théorie ergodique
   - Suites stationnaires et systèmes dynamiques mesurés
   - ergodicité, théorème de récurrence de Poincaré
   - Théorème de Birkhoff, théorème sous-additif de Kingman
   - Applications
3. Marches aléatoires sur des graphes unimodulaires
   - Graphes unimodulaires, exemples
   - Entropie, vitesse, et fonctions harmoniques
   - Frontière de Poisson
   - Le cas des arbres associés aux processus de branchement
   - Graphes planaires, empilements de cercles et unimodularité

Références :

1. Lyons et Peres, Probability on trees and networks
2. Le Jan, Markov paths, loops and fields
3. Einsiedler et Ward, Ergodic theory
4. Angel, Hutchcroft, Nachmias et Ray, Unimodular hyperbolic triangulations: circle packing and random walk

Phénomènes de grande dimension

Cours avancé, Guillaume Aubrun

Ce cours porte sur les phénomènes de grande dimension en analyse et en probabilités.

On étudiera notamment diverses facettes du phénomène de concentration de la mesure : lors de l'étude de problèmes dépendant d'un grand nombre de variables, il arrive que les quantités qu'on cherche à étudier se « concentrent » autour d'une valeur moyenne.

Ce principe est fondamental pour l'étude des phénomènes asymptotiques (i.e. lorsque la dimension tend vers l'inifni) de la géométrie des espaces normés de dimension finie. On étudiera en particulier la géométrie du compact de Banach–Mazur (l'ensemble des espaces normés de dimension fixée) où la méthode probabiliste joue une rôle fondamental.

Contenu detaillé:

- Volume des ensembles convexes : inégalité de Brunn–Minkowski et ses conséquences.
- Concentration de la mesure. Concentration pour des sommes de variables aléatoires, concentration sur la sphère, sur l'espace gaussien. Lien avec l'isopérimétrie. Lemme de Johnson–Lindenstrauss.
- Nombres de recouvrement, liens avec les codes correcteurs.
- Processus gaussiens : inégalité de Dudley, de Sudakov, méthode de chaînage.
- Géométrie des convexes de grande dimension : théorème de John, théorème de Gluskin (diamètre du compact de Banach–Mazur).
- Théorème de Dvoretzky (sections presque euclidiennes de corps convexes) et conséquences.
- Inégalité de Grothendieck ; lien avec la programmation semi-définie.

Références :

- Roman Vershynin, *High-dimensional Probability* (version préliminaire disponible sur la page web de l'auteur).
- Guillaume Aubrun et Stanisław Szarek, *Alice and Bob meet Banach: The Interface of Asymptotic Geometric Analysis and Quantum Information Theory*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 223 (2017).
- Shiri Artstein–Avidan, Apostolos Giannopoulos et Vitali Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 202 (2015).
- D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, SMF, 2004.

Modèles de dimères

Cours avancé, Fabio Toninelli

Ce cours porte sur plusieurs aspects de la théorie mathématique des modèles de dimères sur réseau. Il s'agit de modèles bidimensionnels de mécanique statistique, qui sont exactement résolubles dans un certain sens (Kasteleyn, 1961): la fonction de partition et les corrélations peuvent être exprimées en termes de déterminants de matrices. Récemment il y a eu un regain d'intérêt pour les modèles de dimères, à la fois en probabilités et en physique mathématique. Une raison pour cela est que ces modèles, tout comme par exemple les modèles d'Ising et de percolation critique, possèdent des propriétés d'invariance conforme. De plus, leurs fluctuations sont décrites par un "champ libre Gaussien".

Contenu detaillé:

- théorie de Kasteleyn (calcul de la fonction de partition)
- corrélations et représentation déterminantale
- fonction de hauteur
- limite thermodynamique 1: mesures de Gibbs ergodiques
- convergence des fluctuations de hauteur vers le champ libre Gaussien
- limite thermodynamique 2: forme limite

Sujets plus avancés si le temps le permet:

- bijection de Temperley entre dimères et arbres couvrants
- invariance conforme pour les dimères sur $\mathbb{Z}^2$

References : Principalement: R. Kenyon, Lectures on dimers, arXiv:0910.3129. Pour les sujets plus avancés, des références seront données au fur et à mesure

Probabilités intégrables

Cours avancé, Jérémie Bouttier

En 1961, Stanisław Ulam (plus connu pour sa participation au projet Manhattan) posa le problème dit de la *plus longue sous-suite croissante*, qu'on peut formuler comme suit. Pour σ une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on note $\ell_n(\sigma)$ la longueur maximale d'une sous-suite croissante de σ. Par exemple, pour $\sigma = (4, 3, 7, 5, 2, 6, 1)$ on a $\ell_n(\sigma) = 3$ réalisée entre autres par la sous-suite $(4, 5, 6)$. Que peut-on dire de $\ell_n(\sigma)$ lorsque σ est tirée uniformément au hasard dans le groupe symétrique d'indice n, et qu'on fait tendre n vers l'infini?

Ce problème, popularisé par Hammersley, a suscité de nombreux travaux. On peut voir tout d'abord de manière relativement élémentaire que $\ell_n(\sigma)$ est d'ordre $\sqrt{n}$. Vershik-Kerov et Logan-Shepp ont ensuite montré en 1977 que, en fait, $\ell_n(\sigma)/\sqrt{n} \to 2$ en probabilité. Enfin, en 1998, Baik, Deift et Johansson ont étudié les fluctuations de $\ell_n(\sigma)$ autour de $2\sqrt{n}$, et démontré le résultat remarquablement précis:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\ell_n(\sigma) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq s\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_2(s)$$

où F_2 est la distribution dite de Tracy-Widom, décrivant également les fluctuations de la plus grande valeur propre d'une matrice hermitienne aléatoire.

Ce lien inattendu entre un problème combinatoire et la théorie des matrices aléatoires est illustratif de la richesse des *probabilités intégrables*, un domaine en plein essor employant également des méthodes issues de la physique mathématique, de la théorie des représentations, de l'analyse fonctionnelle, etc. L'objet de ce cours est d'en donner un aperçu.

Contenu du cours

- Outils combinatoires: permutations et partitions aléatoires, fonctions symétriques, diagrammes et tableaux de Young, algorithme de Robinson-Schensted-Knuth.

- Outils analytiques: processus déterminantaux, déterminants de Fredholm, polynômes orthogonaux, méthodes variationnelles, méthodes fermioniques.

- Applications: pavages aléatoires, percolation de dernier passage, modèles de croissance, formes-limites, classe d'universalité KPZ.

Références

1. Dan Romik, *The surprising mathematics of longest increasing subsequences*, Cambridge University Press, 2015. `https://www.math.ucdavis.edu/~romik/book/`

2. Alexei Borodin et Vadim Gorin, *Lectures on integrable probability*, Probability and statistical physics in St. Petersburg. `https://arxiv.org/abs/1212.3351`