Master 2 de mathématiques Avancées (MA2) en 2017-2018

Parcours "Probabilités"

Responsable du parcours: gregory.miermont@ens-lyon.fr

La proposition de parcours s'articule autour des 3 cours fondamentaux suivants

- Calcul Stochastique, par Emmanuel Jacob,
- Physique Statistique, par Oriane Blondel,
- Marches aléatoires sur les graphes, par Grégory Miermont,

des 3 cours avancés suivants

- Sur le mouvement d'un grain de pollen, par Laure Saint-Raymond,
- Modèles de dimères, par Fabio Toninelli
- Equations aux dérivées partielles stochastiques, par Julien Vovelle

et du cours avancé suivant d'une durée de 20h environ du 22 au 26 Janvier 2018

- Graph Limits, par Daniel Kral et Miklos Abert.

Ce parcours propose ainsi trois orientations assez complémentaires. Les cours de calcul stochastique, d'Equations aux dérivées partielles stochastiques et le cours "Sur le mouvement d'un grain de pollen" donnent un aperçu des liens entre les probabilités et l'analyse, en particulier les EDP. Ces deux derniers cours avancés sont communs aux parcours "Probabilités" et "Equations aux dérivées partielles" et ils amènent aux portes de sujets en pleine effervescence sur les structures de régularité ou la propagation du chaos. Le cours "Physique Statistique", le cours sur les marches aléatoires, ainsi que le cours avancé sur les modèles de dimères donnent un aperçu d'une partie importante des probabilités discrètes, et amènent à une large variété de thématiques dont la géométrie aléatoire, la physique statistique hors équilibre, les marches aléatoires. Finalement le cours "Graph Limits" est à la frontière entre les probabilités, la géométrie discrète et l'informatique théorique.

Calcul Stochastique

Cours fondamental, Emmanuel Jacob

Ce cours présentera l'essentiel des outils permettant de construire et d'étudier les processus stochastiques continus en temps continu. Dans ce bestiaire, l'exemple maître est le mouvement brownien, mais on sera très vite amenés à rencontrer les martingales, puis les semimartingales, une famille riche de processus pour laquelle on peut développer un calcul différentiel et intégral, et résoudre certaines équations différentielles stochastiques.

La motivation de l'étude des équations différentielles stochastiques vient de la volonté de décrire le comportement global de processus aléatoires dont l'évolution infinitésimale obéit à certaines équations. Comme il s'agit de processus aléatoires, ces équations ne sont pas des équations différentielles (ou EDP) ordinaires, mais incorporent un bruit aléatoire, un accroissement infinitésimal de mouvement brownien. Le problème principal de leur étude vient de ce que le mouvement brownien, et par suite les autres processus que l'on veut décrire, a des trajectoires trop irrégulières (non dérivables, par exemple) pour que le calcul différentiel/intégral usuel ait un sens.

Face à cet obstacle, nous développerons une notion d'intégrale éminemment stochastique, l'intégrale d'Ito. Elle donnera lieu à un calcul intégral particulier, dans lequel la formule d'Ito fournit une intégration par parties d'un nouveau genre. Ce calcul intégral nous permettra d'étudier les équations différentielles stochastiques pour les semimartingales continues, et apportera également un éclairage nouveau sur ces processus, par exemple avec le théorème de caractérisation de Lévy.

Contenu :

- Processus à temps continu. Lemme de Kolmogorov, régularisation.
- Construction du mouvement brownien
- Martingales, martingales locales, théorèmes d'arrêt
- Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale
- Formule d'Ito et applications
- EDS

Références :

- Karatzas-Shreve: Brownian motion and stochastic calculus
- Le Gall: Mouvement brownien et calcul stochastique
- Revuz-Yor: Continuous martingales and Brownian motion
- Varadhan: Stochastic processes

Mécanique statistique

Cours fondamental, Oriane Blondel

En *mécanique statistique*, on modélise des systèmes physiques par un grand nombre de composants microscopiques qui interagissent aléatoirement de façon simple. On cherche alors à comprendre comment ces propriétés microscopiques élémentaires peuvent générer des phénomènes macroscopiques intéressants comme une transition de phase ou une brisure spontanée de symétrie. Cela a donné lieu au développement d'une branche importante de la théorie des probabilités, et le but de ce cours est de donner un aperçu des méthodes et outils qui y sont utilisés. Pour cela, nous étudierons trois modèles fondamentaux : la percolation, le modèle d'Ising et les polymères aléatoires.

Contenu du cours

1. Percolation
   - Définition, transition de phase
   - Inégalité FKG, p=1/2
   - Décroissance exponentielle dans le régime sous-critique
   - Théorème de Russo-Seymour-Welsh pour la percolation critique
2. Modèle d'Ising
   - Définition, inégalités de décorrélation
   - Limite thermodynamique, énergie libre, transition de phase
   - Basse température et argument de Peierls
   - Unicité à haute température
3. Polymères aléatoires
   - Définition, énergie libre
   - Désordre faible/fort
   - Comportement diffusif
   - Localisation

Références

[1] W. Werner, Percolation et modèle d'Ising, SMF 2005.

[2] Y. Velenik, Introduction aux champs aléatoires markoviens et gibbsiens, http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2006-2007/Gibbs/gibbs.pdf.

[3] F. den Hollander, Random polymers, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXVII - 2007.

Marches aléatoires sur les graphes

Cours fondamental, Grégory Miermont

Une chaîne de Markov réversible peut être vue comme une marche aléatoire sur un graphe pondéré, dont la géométrie peut permettre de décrire précisément le comportement de la marche, et vice-versa. Ce cours propose une étude de ces marches, et notamment la caractérisation de la récurrence et de la transience, par les propriétés électriques du graphe, et le lien entre ces propriétés et certains objets aléatoires naturels définis sur le graphe, comme les marches à boucles effacées, les arbres couvrants uniformes, le champ libre gaussien, etc. Nous discuterons quelques exemples-type de comportement de marches aléatoires sur les arbres, les graphes de Cayley. Après quelques séances d'introduction à la théorie ergodique, on sera ensuite amené à étudier les marches aléatoires sur des graphes eux-mêmes aléatoires : arbres et graphes unimodulaires. Si le temps le permet, on se penchera plus spécifiquement sur le cas des graphes planaires.

Contenu du cours :

1. Marches aléatoires et réseaux électriques
   - Forme de Dirichlet discrète, énergie
   - Caractérisation du comportement asymptotique par la résistance du réseau.
   - Le cas des marches aléatoires sur les arbres, exemples
   - Arbres couvrant uniforme d'un graphe, matrix-tree theorem
   - Champ libre gaussien sur un graphe
2. Rudiments de théorie ergodique
   - Suites stationnaires et systèmes dynamiques mesurés
   - ergodicité, théorème de récurrence de Poincaré
   - Théorème de Birkhoff, théorème sous-additif de Kingman
   - Applications
3. Marches aléatoires sur des graphes unimodulaires
   - Graphes unimodulaires, exemples
   - Entropie, vitesse, et fonctions harmoniques
   - Frontière de Poisson
   - Le cas des arbres associés aux processus de branchement
   - Graphes planaires, empilements de cercles et unimodularité

Références :

1. Lyons et Peres, Probability on trees and networks
2. Le Jan, Markov paths, loops and fields
3. Einsiedler et Ward, Ergodic theory
4. Angel, Hutchcroft, Nachmias et Ray, Unimodular hyperbolic triangulations: circle packing and random walk

Sur le mouvement d'un grain de pollen

Cours avancé, Laure Saint-Raymond

Partie 1 : description mésoscopique

- équation de Fokker-Planck
- lemmes de moyenne
- hypo-coercivité, relaxation
- lien avec le processus de Ornstein-Uhlenbeck

Partie 2 : limite de diffusion

- convergence vers l'équation de la chaleur
- analyse multi-échelle
- méthodes de compacité faible
- convergence vers le mouvement Brownien
- corrélations en temps
- tension

Partie 3 : description microscopique

- hiérarchie BBGKY
- du système d'EDO au système d'EDP
- bornes a priori
- du déterministe à l'aléatoire
- propagation du chaos
- échantillonnage des corrélations

Modèles de dimères

Cours avancé, Fabio Toninelli

Ce cours porte sur plusieurs aspects de la théorie mathématique des modèles de dimères sur réseau. Il s'agit de modèles bidimensionnels de mécanique statistique, qui sont exactement résolubles dans un certain sens (Kasteleyn, 1961): la fonction de partition et les corrélations peuvent être exprimées en termes de déterminants de matrices. Récemment il y a eu un regain d'intérêt pour les modèles de dimères, à la fois en probabilités et en physique mathématique. Une raison pour cela est que ces modèles, tout comme par exemple les modèles d'Ising et de percolation critique, possèdent des propriétés d'invariance conforme. De plus, leurs fluctuations sont décrites par un "champs libre Gaussien".

Contenu detaillé:

- théorie de Kasteleyn (calcul de la fonction de partition)
- corrélations et représentation déterminantale
- fonction de hauteur
- limite thermodynamique 1: mesures de Gibbs ergodiques
- convergence des fluctuations de hauteur vers le champs libre Gaussien
- limite thermodynamique 2: forme limite

Sujets plus avancés si le temps le permet:

- bijection de Temperley entre dimeres et arbres couvrants
- invariance conforme pour les dimeres sur $\mathbb{Z}^2$

References : principalement: R. Kenyon, Lectures on dimers, arXiv:0910.3129 pour les sujets plus avancés, des références seront données au fur et à mesure

Equations aux dérivées partielles stochastiques

Cours avancé, Julien Vovelle

Contenu du cours

1. Limites de diffusion et limites hydrodynamiques

   Objet : convergence de modèles aléatoires à l'échelle mésoscopiques (description par des équations cinétiques type Boltzmann, Fokker-Planc cinétique, etc.) vers des modèles stochastiques à l'échelle macroscopique (en l'occurrence, des équations paraboliques avec bruit blanc en temps, coloré en espace).

   Le mouvement brownien est introduit via le théorème de Donsker.

   Mots-clefs : limites hydrodynamiques, équations paraboliques stochastiques (solutions fortes/faibles au sens probabiliste), méthode de fonction test perturbée (Papanicolaou - Stroock - Varadhan), tension, théorèmes de Prohorov et Skorohod

2. Limites de diffusion vers l'équation de la chaleur stochastique

   Introduction du bruit blanc espace-temps par l'étude de la limite de diffusion de l'équation de la chaleur pilotée par un processus stationnaire temps-espace vers l'équation de la chaleur stochastique (cas d'un bruit additif).

3. Résolution de l'équation de quantisation stochastique en dimension 2 d'espace (d'après Da Prato Debussche 2003)

   Mots-clefs : solution invariante, renormalisation, résolution locale/globale.

Références :

- G. Da Prato and A. Debussche, Strong solutions to the stochastic quantization equations, Ann. Probab. 31 (2003), no. 4, 1900-1916.
- A. Debussche and J. Vovelle, Diffusion limit for a stochastic kinetic problem, Commun. Pure Appl. Anal 11 (2012), no. 6, 2305-2326.
- G. DaPrato and J. Zabczyk, Stochastic equations in infinite dimensions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- P. Billingsley, Convergence of probability measures, second ed., Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, A Wiley-Interscience Publication

Graph Limits. (22–26 janvier 2018)

Cours avancé, par Daniel Kral et Miklos Abert

Format: The global duration of courses will be around 20 hours.

- Daniel Kral (Warwick) : Dense Limits.
- Miklos Abert (Budapest) : Sparse Limits.

During these last 10 years, graph limits have become a very popular subject of research at the crossroads between mathematics and computer science. A principal idea is to model "arbitrarily large" graphs, and more precisely to give sense to what could be the limit of a “converging" sequence of graphs. Two notions of graph limits have been introduced, both based on finite (rooted) subgraph densities. In the “sparse case", *Graphings* are Benjamini-Schramm limits of bounded degree graphs. In the dense case, *Graphons* were proposed by Lovasz and Szegedy as limiting objects of converging graph sequence $S = (G_i)$, where S is said to be converging if for every finite graph H, the sequence of H-densities $(d(H, G_i))$ converges. Graphons provide a suitable framework for Ramsey questions involving graph densities and property testing algorithms.

There are many challenging and important open questions in this field, some of which will likely require the advent of new tools and techniques to resolve them. One direction of great interest involves developing a unified approach of limiting objects covering the intermediate density cases. Another is to provide a full description of finitely forcible graphons. More precisely, which properties can be forced by prescribing the densities of finitely many subgraphs? For instance, A. Thomason proved that if the densities of edges and 4-cycles in a graph sequence S are equal to those expected for a random graph sequence, then S enjoys all the “quasi-random" properties (in the sense of Chung, Graham and Wilson). Another example of this kind comes from a celebrated theorem of Turán which states that if the edge density is larger than $1-\frac{1}{k}$, then it contains a complete $k+1$-graph. A related open question involves a description of inequalities involving H-densities verified by all graphons? The introduction of flag-algebras by Razborov is a milestone in this theory and the last fifteen years have seen many open questions solved by the "semi-definite method". Nevertheless several difficult problems remain unsolved. Finally, in the context of testing algorithms, one is interested in properties which can be efficiently tested. For instance, a description of those properties testable with a polynomial size sample remains an open question.