**Master de Mathématiques Avancées, seconde année (MA2), année 2017-2018**

## Parcours Géométrie

**Responsable du parcours**: jean-claude.sikorav@ens-lyon.fr

Ce parcours vise à présenter aux étudiants différents types de géométries jouant un rôle important dans la recherche actuelle : géométrie différentielle générale et analyse sur les variétés, géométrie complexe et presque complexe, géométrie riemannienne, géométrie des groupes, cette dernière étant vue sous le point de vue dynamique.

### Cours fondamentaux (36 h CM, 18h TD)

- *Introduction à la théorie de l'indice*, Klaus Niederkrüger
- *Introduction à la géométrie complexe et presque complexe*, Alexey Glutsyuk et Jean-Claude Sikorav

### Cours avancés (24h CM)

- *Phénomènes de rigidité en géométrie riemannienne*, Marco Mazzucchelli
- *Entropy and soficity*, Lewis Bowen, David Kerr, Brandon Seward, Douglas Lind

# Cours Fondamental 1 : introduction à la théorie de l'indice

**Klaus Niederkrüger,**

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer exprime l'indice analytique (dimension du noyau moins celle du conoyau) d'un opérateur différentiel elliptique sur une variété compacte en termes topologiques. Il peut être considéré comme une vaste généralisation du théorème de Riemann-Roch, et a été lui-même généralisé dans diverses directions, donnant naissance à toute une théorie dite de l'indice, intimement liée à la géométrie non commutative.

Le théorème d'Atiyah-Singer et les outils associés ont joué un rôle essentiel, et continuent de le faire, pour de nombreux problèmes de topologie et de géométrie différentielle globale. Il admet (au moins) trois types de preuves : cobordisme, $K$-théorie [topologique], équation de la chaleur. Le cours présentera les principaux outils de la preuve par la $K$-théorie, introduisant pour cela plusieurs outiles fondamentaux en géométrie différentielle et en analyse globale.

## Contenu

1 Fibrés vectoriels, classes caractéristiques, classe de Todd

2 $K$-théorie topologique, caractère de Chern

3 Symbole d'un opérateur, opérateurs elliptiques, propriété de Fredholm

4 Relations entre le symbole et la $K$-théorie, opérateurs pseudo-différentiels

5 Énoncé du théorème, grandes étapes de sa preuve.

## Référ'ences


- M.F. Atiyah, *K-theory. Lecture notes by D.W. Anderson*, Benjamin, 1967.
- M.F. Atiyah, I. Singer: *The index of elliptic operators. I, III, IV.*, Annals of Math. 1968, 1971.
- B. Booss and Bleecker, *Topology and analysis. The Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physics*, Universitext, Springer, 1985.
- A. Hatcher, *Vector bundles and K-Theory*, https://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpa
- J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies 76, Princeton Univ. Press, 1974.

## Cours Fondamental 2 : Introduction à la géométrie complexe et presque complexe

Alexey Glutsyuk, Jean-Claude Sikorav

Ce cours présente les aspects géométriques de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, qui outre leur intérêt propre jouent un rôle fondamental en géométrie algébrique complexe. Il présente aussi la géométrie presque complexe, qui est l'un des principaux outils de la géométrie symplectique actuelle.

### Contenu

A Géométrie complexe

1. Fonctions holomorphes de plusieurs variables, analyticité, théorème d'extension de Hartogs
2. Ensembles analytiques, composantes irréductibles, cas de la dimension un
3. Introduction à la géométrie algébrique complexe : théorème de Chow
4. Domaine d'holomorphie, convexité holomorphe, pseudo-convenxité
5. Variétés de Stein, cohomologie de Dolbeault, faisceaux
6. Si le temps le permet : techniques $L^2$ ou introduction aux variétés kählériennes

B Géométrie presque complexe

1. Structures presque complexes et structures symplectiques
2. Courbes pseudo-holomorphes, étude locale
3. Introduction aux théorèmes de compacité pour les courbes pseudo-holomorphes

### Références


- E. M. Chirka, *Complex Analytic sets*, Kluwer, 1989.
- L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland, 1973.
- D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology. Second edition*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 52, 2012.

**Cours Avancé 1 : Phénomènes de rigidité en géométrie riemannienne**

Marco Mazzucchelli

En géométrie [et aussi en analyse], la rigidité est un concept polysémique, popularié surtout par Gromov, qui s'oppose à la flexibilité. Ce cours étudie quelques aspects de ce concept en géométrie riemannienne, liés aux deux problèemes suivants sur une variété riemannienne compacte :

- que peut-on dire de la plus petite longueur d'une géodésique fermée, ou *systole* ?
- la métrique est-elle déterminée par les longueurs de toutes les géodésiques fermées, ou par le spectre du laplacien, et comment longueurs et spectre sont-elles reliées ?

**Contenu**

1 (Si nécessaire) Rappels de géométrie riemannienne : géodésiques, courbure, structure du fibré tangent d'une surface, surfaces à courbure négative

2 Variétés essentielles et théorème isosystolique de Gromov

3 Inégalité isosystolique pour la 2-sphère avec courbure pincée

4 Rigidité riemannienne du spectre en longueurs marqué : théorèmes de Guillemin-Kazhdan et de Otal

5 Rigidité riemannienne au bord en courbure négative : théorème de Croke-Otal

4 Rigidité riemannienne au bord pour les variétés simples : théorème de Pestov-Uhlmann

**Références**


- V. Guillemin and D. Kazhdan, *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology 19 (1980), 301-312.
- John M. Lee,*Introduction to Riemannnian manifolds*, Springer 1997.
- W.J. Merry, G. P. Paternain, *Inverse Problems in Geometry and Dynamics*, Lecture notes 2010-2011, https://www.dpmms.cam.ac.uk/ gpp24/ipgd(3).pdf
- J.-P. Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. Math. 131 (1990), 151-162.
- J.-P. Otal, *Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, Comm. Math. Helv. 65 (1990) 334-347.
- L. Pestov, G. Uhlmann, *Two dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid*, Ann. Math. 161 (2005), 1093-1110
- A. Wilkinson, *Lectures on Marked Length Spectrum Rigidity*, IAS/Park City Mathematics Series Volume 21, Amer. Math. Soc., 2012.

## Cours Avancé 2 : Entropy and soficity

Lewis Bowen, David Kerr , Brandon Seward, Douglas Lind

The notion of entropy, first introduced by Kolmogorov in the 1950's in the context of topological dynamics, constitutes a family of measure-conjugacy invariants which are crucial in the study of dynamical systems. Entropy plays an essential role in the theory of deterministic chaos as a measure of the intrinsic instability of the dynamics of a system and the speed of divergence of nearby trajectories. Intuitively, it is a numerical measure of the slcert_gltw of the futur behaviour of a system given its past.

Through important work of Kiefer, Ornstein-Weiss, the notion of entropy was extended in the 80's to measure preserving actions of amenable group on standard probability spaces. In this more general context, these topological invariants play an essential role in several disparate areas of mathematics including algebra, geometry, symbolic dynamics, the study of algebraic groups, harmonic analysis, probability theory (including non-commutative probability) and even number theory.

Recently, Lewis Bowen extended the classical notion of entropy to a much broader family of group actions verifying a considerably weaker finite approximation property known as soficity. He further showed that the so-called *sofic entropy* of an amenable group action coincides with its classical entropy. Subsequently, David Kerr and Hanfeng Li introduced a more general operator-algebraic approach to sofic entropy which also coincides with its topological counterpart in the case of amenable group actions. The expansion of entropy theory beyond the realm of amenable groups has opened the door to numerous new and exciting research problems surrounding the analytic, probabilistic, and geometric theory of groups and their actions.

Sofic groups constitute a natural generalisation of both amenable groups and residually finite groups. They are well approximated by various finite objects including graphs and permutations. They were first introduced by M. Gromov in connection with the Gottschalk surjunctivity conjecture which states that if $G$ is any discrete countable group, then for every finite set $A$ (with the discrete topology), the Bernoulli shift $A^G$ is not isomorphic with any proper subshift. While Gottschalk's conjecture remains open, sofic groups constitute the largest family of groups for which the conjecture has been verified. In this note, Gromov asked whether all countable discrete groups are sofic, a question which to date remains open.

Prerequisite: Measure theory, elementary group theory. The course will give an intensive introduction to the dynamics and classical entropy of Z actions.