Master de Mathématiques Avancées, 2ème année

Année 2017-2018

Parcours "ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES"

Responsable du parcours: Simon Masnou, masnou@univ-lyon1.fr

Ce parcours, qui vise à préparer les étudiants à la recherche dans le domaine de l'analyse théorique et numérique des équations aux dérivées partielles, comporte trois volets :

- une phase de remise à niveau, concentrée sur deux semaines et demi, et qui a pour but de garantir un socle de connaissances commun à des étudiants issus de formations mathématiques variées (normaliens, universitaires, ingénieurs). Cette remise à niveau est optionnelle mais très fortement conseillée.
- trois cours de base qui offrent une vaste introduction aux techniques d'analyse des grandes classes d'équations aux dérivées partielles (elliptiques, paraboliques, hyperboliques, dispersives, cinétiques) et à l'approximation discrète de leurs solutions.
- trois cours avancés sur des sujets en lien étroit avec la recherche actuelle : l'analyse harmonique pour les équations de la mécanique des fluides, l'étude d'équations aux dérivées partielles stochastiques et, au travers de l'exemple du mouvement d'un grain de pollen, les liens entre des modèles mésoscopiques, macroscopiques et microscopiques, étudiés avec des outils d'analyse tant déterministes que stochastiques.

1 Cours de remise à niveau

CRN1 : Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires (D. Serre), 16h

1. Principe du maximum de Hopf pour les équations elliptiques d'ordre 2. Application à l'unicité.
2. Méthode de Perron pour l'équation de Laplace. Fonctions barrières, existence et unicité.
3. Théorème de Hille-Yosida. Formule de Duhamel. Application à des équations du type de la chaleur.

CRN2 : Outils d'analyse pour les équations aux dérivées partielles (S. Masnou), 12h

1. Convergences faible et faible-*. Compacité faible ou faible-* dans les espaces réflexifs ou séparables
2. Espaces de Sobolev à exposant entier : approximation, trace, extension, inégalités de Sobolev, injections. Transformée de Fourier et espaces H^s. Représentation de l'espace dual.
3. Opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace de Hilbert séparable. Théorème de décomposition spectrale.

CRN3 : Outils stochastiques (C. Sabot), 10h

1. Martingales en temps discret (théorèmes de convergence, inégalités de Doob).
2. Construction du mouvement brownien.
3. Mouvement brownien et martingales continues.

2 Cours fondamentaux

CF1 : Équations elliptiques (L. Dupaigne), 24h

1. Principes du maximum
   (a) Cas du laplacien : formules de la moyenne, principe du maximum, inégalité de Harnack, théorème de Liouville, lemme du point frontière de Hopf
   (b) Opérateurs elliptiques : généralités et généralisations, valeur propre principale
   (c) Principe du maximum sur les domaines fins, méthode des hyperplans/hypersphères mobiles
2. Équations uniformément elliptiques linéaires
   (a) Rappels succincts sur la résolution des problèmes variationnels au sens faible
   (b) Fonctions harmoniques : régularité intérieure, résolution du problème de Dirichlet (sur la boule par la méthode des fonctions de Green, sur un domaine lisse par la méthode de Perron). Estimations gradient par la méthode de Bernstein
   (c) Théorie de Schauder : résolution du problème de Dirichlet sur la boule, estimations a priori pour les solutions lisses (méthode du gel des coefficients), existence de solutions lisses (méthode de continuité). Généralisation aux équations paraboliques
3. Équations elliptiques semilinéaires : l'exemple des solutions extrémales
   (a) Rappels sur le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Théorème des fonctions implicites, forme globale, lien avec la méthode de continuité, théorème de bifurcation de Rabinowitz, réduction de Liapounov-Schmidt, indice de Fredholm ;
   (b) Méthode des sous et sursolutions : solution minimale et maximale, lien avec les minimiseurs locaux, retour sur la méthode de Perron, extension au cas quasi-linéaire
   (c) Méthodes de blow-up et blow-down, notions sur l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère, formule de monotonie
4. Équations elliptiques quasilinéaires : l'exemple du problème de Plateau
   (a) Méthodes itératives : inégalité de Cacciopoli, itération de Moser et théorème de De Giorgi-Nash-Moser
   (b) Méthode de continuité non-linéaire, théorème du point fixe de Schauder
   (c) Calcul des variations : éuation d'Euler-Lagrange, lemme du col, concentration-compacité

CF2 : Équations d'évolution (E. Grenier), 24h

1. Introduction aux problèmes d'évolution, exemples
2. Équations hyperboliques
   (a) Méthode des caractéristiques en dimension 1
   (b) Notion d'estimation d'énergie, de système symétrique, de système symétrisable.
   (c) Existence et unicité en temps petit d'une solution régulière.
   (d) Notion de choc, d'onde de détente, d'entropie

   (e) Existence d'une solution faible globale.
   (f) Exemples de conditions aux limites
3. Équations paraboliques
   (a) Estimations d'énergie
   (b) Existence locale et unicité d'une solution forte, régularité
   (c) L'exemple de KPP
   (d) Notion d'onde progressive
   (e) Limite faible viscosité en temps petit : retour vers les équations hyperboliques
4. Équations dispersives
   (a) Présentation de l'équation de Schrödinger et NLS.
   (b) Solution linéaire, effet de dispersion, comportement asymptotique.
   (c) Existence et unicité pour NLS
5. Équations cinétiques : étude d'un exemple simple

CF3 : Approximations numériques des équations aux dérivées partielles (F. Lagoutière), 24h

1. Équations paraboliques (équation de la chaleur sur un parallèlépipède) et méthodes de différences finies.
   (a) Rappels sur l'équation de la chaleur.
   (b) Schéma explicite : consistance, stabilité convergence en norme L^∞.
   (c) θ-schéma : consistance, stabilité, convergence en norme $L^\infty([0,T];L^2)$.
   (d) Théorème d'équivalence de Lax.
   (e) Quelques autres équations et schémas de différences finies (équations dispersives si le temps le permet).
2. Équations elliptiques et méthodes d'éléments finis.
   (a) Applications du théorème de Lax-Milgram et quelques rappels.
   (b) Approximation interne, lemme de Céa,
   (c) Interpolation dans H^2 et ordre de convergence dans H^1.
   (d) Lemme d'Aubin-Nitsche et ordre de convergence dans L^2.
3. Équations hyperboliques non linéaires et schémas de volumes finis.
   (a) Équations de transport et méthode des caractéristiques.
   (b) Équations scalaires non linéaires, solutions faibles, relations de Rankine-Hugoniot.
   (c) Solutions au sens de Krushkov (unicité de la solution).
   (d) Schémas monotones et convergence (existence de la solution).

3 Cours avancés

Les cours CA2 et CA3 sont mutualisés avec le parcours "Probabilités".

CA1 : Analyse harmonique et mécanique des fluides (D. Iftimie), 24h

À l'aide d'outils d'analyse harmonique nous montrerons quelques résultats importants en mécaniques des fluides incompressibles, plus précisément sur les équations d'Euler et de Navier-Stokes incompressibles. Certains théorèmes sont classiques (mais toujours d'actualité), d'autres sont récents et répondent à des vieilles questions ouvertes. Voici le programme précis (suivi dans la limite du temps disponible).

1. Équations d'Euler.
   (a) Loi de Biot-Savart et solutions faibles à tourbillon dans L^p.
   (b) Théorie de Caldéron-Zygmund et théorème d'unicité de Yudovich pour les tourbillons bornés.
   (c) Nappes de tourbillon et théorème de Delort.
   (d) Solutions régulières et exemple de croissance double exponentielle de Kiselev et Šverák.
2. Équations de Navier-Stokes.
   (a) Solutions de Leray.
   (b) Solutions mild dans BMO^{-1}, théorème de Koch et Tataru.
   (c) Caractère mal-posé dans C^{-1}, théorème de Bourgain et Pavlović.

CA2 : Équations aux dérivées partielles stochastiques (J. Vovelle), 24h

I. Approximation-diffusion dans les EDP

   Objet : convergence d'EDPs aléatoires vers des EDPs stochastiques, par étude des fluctuations dans les phénomènes de moyennisation dans des équations paraboliques à coefficients aléatoires.

   Le mouvement brownien est introduit via le théorème de Donsker.

   Mots-clefs : équations paraboliques stochastiques (solutions fortes/faibles au sens probabiliste), méthode de fonction test perturbée (Papanicolaou - Stroock - Varadhan), tension, théorèmes de Prohorov et Skorohod

II. Limites de diffusion vers l'équation de la chaleur stochastique

   Introduction du bruit blanc espace-temps par l'étude de la limite de diffusion de l'équation de la chaleur pilotée par un processus stationnaire temps-espace vers l'équation de la chaleur stochastique (cas d'un bruit additif).

III. Résolution de l'équation de quantisation stochastique en dimension 2 d'espace (d'après Da Prato Debussche 2003)

   Mots-clefs : solution invariante, renormalisation, résolution locale/globale.

CA3 : Sur le mouvement d'un grain de pollen (L. Saint-Raymond), 24h

Selon l'échelle d'observation choisie, le mouvement d'un grain de pollen peut être décrit par différents modèles mathématiques. L'objectif de ce cours est de présenter ces différents systèmes et leurs propriétés mathématiques, et de montrer comment ils s'articulent les uns avec les autres.

1. Description mésoscopique
   (a) Équation de Fokker-Planck
      i. Lemmes de moyenne
      ii. Hypo-coercivité, relaxation
   (b) Lien avec le processus de Ornstein-Uhlenbeck
2. Limite de diffusion
   (a) Convergence vers l'équation de la chaleur
      i. Analyse multi-échelle
      ii. Méthodes de compacité faible
   (b) Convergence vers le mouvement Brownien
      i. Corrélations en temps
      ii. Tension
3. Description microscopique
   (a) Hiérarchie BBGKY
      i. Du système d'EDO au système d'EDP
      ii. Bornes a priori
   (b) Du déterministe à l'aléatoire
      i. Propagation du chaos
      ii. Echantillonnage des corréations