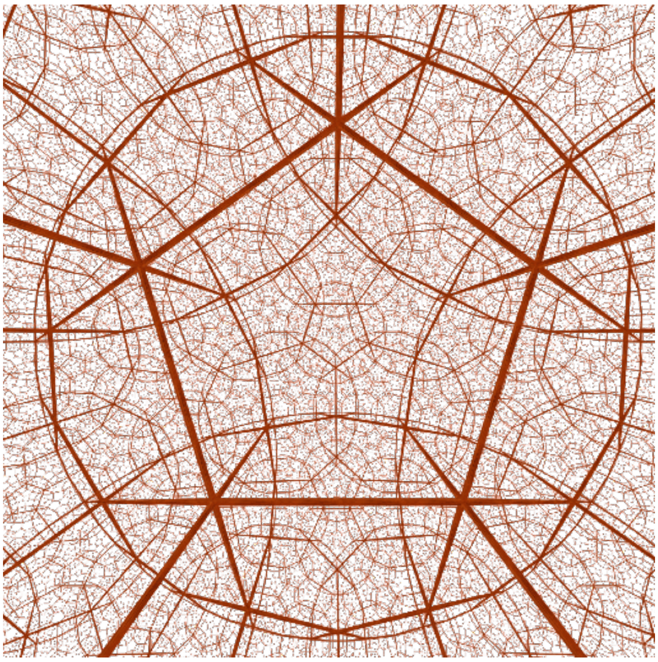
INSTITUT FOURIER Formation recherche

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

UFR IM²AG UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

M2 — 2020-21—Grenoble
Groups and Geometry



La géométrie de nombreux objets interessants est souvent plus élaborée (et interessante ?) que la géométrie Euclidienne.

Par exemple, les surfaces dites fermées (orientables, compactes sans bord) peuvent être équipées d'une géométrie uniformisée, telle que la géométrie de la sphère ronde pour la sphère, une géométrie localement euclidienne plate pour le tore, et une géométrie localement hyperbolique pour *toutes* les autres surfaces.

Par exemple encore, le complémentaire dans $\mathbf{S}^3$ de nombreux noeuds ou entrelacs peut être équipé d'une géométrie complète, localement hyperbolique, modelée sur l'espace hyperbolique réel de dimension 3.

Ces géométries peuvent être étudiées, dans l'optique du programme d'Erlangen de Felix Klein, par l'algèbre d'un groupe « de Lie », comme SL(2, **R**), ou SL(2, **C**), ou encore SO(n, 1) ou SU(n, 1).

Mais l'importance des groupes dans ces descriptions ne s'arrête pas là. D'un espace modèle comme l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$ à la variété, on peut voir un revêtement, et l'action du groupe fondamental, discret. Ce groupe hérite lui même de propriétés géométriques et algébriques (de cohomologie par exemple), et cette intrication fait qu'il peut être étudié, et peut servir à étudier les variétés. L'illustration de la page précédente montre un pavage régulier de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$ par des dodécaèdres hyperboliques, codé par l'action d'un groupe discret, groupe fondamental d'un certain objet hyperbolique quotient.

Dans cette interaction entre groupes et géométrie, on abordera des sujets très vivants au niveau de la recherche actuelle.

— —

Programme. *(les horaires sont réels, et non pas hetd).*

Septembre 2020. Cours préliminaire (commun à tous) de 9h. Groupe fondamental, revêtements, et présentations de groupes.

Septembre-Décembre 2020. 2 cours au choix parmi ces trois cours fondamentaux (33h et 18h de TD):

- —Espaces Hyperboliques : Géométrie et Groupes Discrets, par Anne Parreau et Pierre Will
- —Topologie algorithmique et groupes, par Francis Lazarus (2/3), et François Dahmani (1/3)
- — Théorie des representations et algèbre homologique, par Claire Amiot et Estanislao Herscovich

Janvier-Avril 2021. **1 cours au choix** parmi 2 cours avancés (24h)

- —Méthodes effectives pour les groupes arithmétiques, par Martin Deraux
- —Hyperbolicités dans les groupes discrets, par François Dahmani

— —

Espaces Hyperboliques : Géométrie et Groupes Discrets (Anne Parreau & Pierre Will, 33h, 18h de TD)

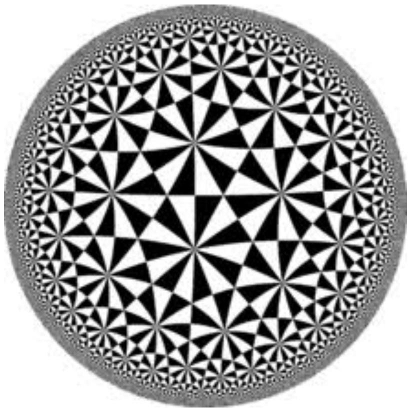
Les espaces hyperboliques interviennent dans de nombreux domaines de la géométrie. Ils peuvent être étudiés pour leur intérêt propre, par exemple pour leurs groupes discrets et leur quotients, mais ils servent aussi d'espaces de référence ou de comparaison, par exemple en géométrie des groupes. L'objectif de ce cours est de donner une description de ces espaces, et de construire des exemples de réseaux (les groupes discrets pour lesquels le quotient est de volume fini).

L'exemple fondamental est celui du plan hyperbolique réel, associé aux groupes dits fuchsiens. Dans un premier temps, nous mettrons l'accent sur ce cas, et l'utiliserons pour exposer et illustrer des résultats et méthodes qui peuvent se généraliser. Entre autres, nous décrirons en détail la géométrie du plan hyperbolique, et discuterons groupes discrets, quotients, domaines fondamentaux, théorème du polygone de Poincaré, groupe modulaire, groupes triangulaires.

Dans la suite, nous nous intéresserons aux espaces hyperboliques réels de dimension plus grande (aspects métriques, courbure négative), dont nous présenterons certains exemples de réseaux. En fonction du temps disponible, nous étudierons des généralisations possibles (espace hyperbolique complexe, espaces symétriques de rang supérieur...).

Bibliographie "de base" :

* Beardon : The geometry of discrete groups, Springer.
* Bonahon : From Euclidean Surfaces to Hyperbolic knots, AMS.
* Ratcliffe : Foundations of Hyperbolic manifolds, Springer.
* Thurston : Three dimensional geometry and topology, Princeton University Press.



Bibliographie " pour aller plus loin"

* Goldman : Complex Hyperbolic Geometry, Oxford.
* Eberlein : Geometry of Nonpositively Curved Manifolds, University of Chicago Press.
* Bridson & Haefliger : Metric spaces of non-positive curvature, Springer.

Stages possibles:

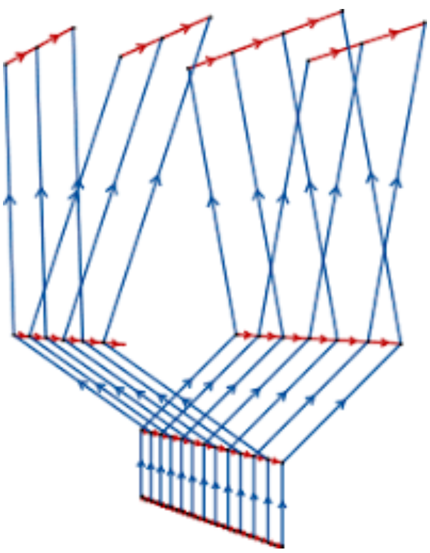
— Hyperbolicité complexe

— Rang supérieur

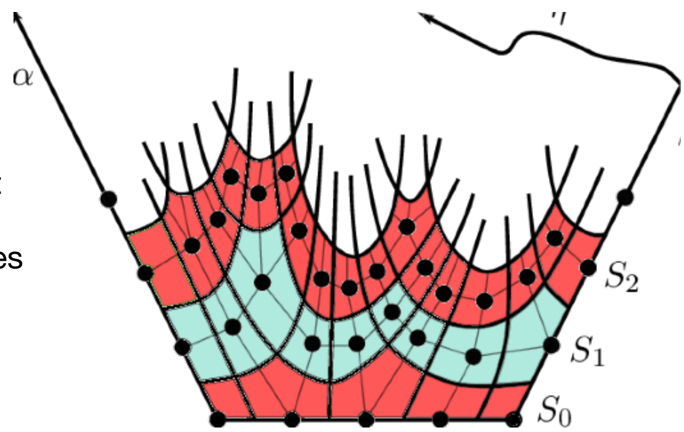
Topologie algorithmique et groupes, par Francis Lazarus, et François Dahmani

Décrire les objets par des structures discrètes présente de nombreux avantages, mais fait apparaitre cruellement que nous n'en comprenons que peu. Par exemple, on peut facilement calculer des présentations de groupes fondamentaux de complexes simpliciaux, mais, en général, savoir qu'un complexe simplicial possède un groupe fondamental trivial est indécidable. Ce cours propose une approche algorithmique pour traiter de quelques problèmes fondamentaux en topologie (souvent interprétés dans les groupes fondamentaux), tels que l'homotopie entre courbes, l'homéomorphisme entre espaces, ou la trivialité d'un nœud.

On traitera ainsi ces problèmes dans des surfaces, et on verra en retour comment la non-existence d'un algorithme capable de résoudre le problème du mot (dans des groupes généraux) se reporte sur le problème de l'homotopie entre courbes ou de l'homéomorphisme entre espaces. L'étude de la trivialité des nœuds sera par ailleurs l'occasion d'introduire la théorie des surfaces normales qui permet de "discrétiser" l'espace des surfaces à l'intérieur d'une 3-variété. Dans un autre développement, la géométrie du « problème du mot » pourra nous mener vers des groupes « flocons de neige » ou les groupes d'Artin rectangulaires.



Bibliography:
John Stillwell. Classical Topology and Combinatorial Group Theory. Springer, 1995.
Jonathan L. Gross and Thomas W. Tucker. *Topological Graph Theory*. Dover Publications, 2001.
Bojan Mohar and Carsten Thomassen. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 2001.
Joel Hass, Jeffrey C. Lagarias, Nicholas Pippenger. *The Computational Complexity of Knot and Link Problems*. Journal of the ACM (JACM), 46(2), 185-211.
The geometry of the word problem for finitely generated groups, N. Brady, T. Riley, H. Short, CRM, Birhauser.
http://www.gipsa-lab.fr/~francis.lazarus/Enseignement/compuTopo.html



Stages possibles:
— Groupes de Coxeter et d'Artin rectangulaires, et groupes « spéciaux cubiques CAT(0) »
— Le problème de conjugaison pour GL_n(Z), ou les MCG

Credit: Anne Thomas

Théorie des representations et algèbre homologique (Claire Amiot, Estanislao Herscovich, 33h et 18h de TD)

Programme:

Ch1. Théorie des modules et des catégories

Modules. Opérations basiques: sommes directes, produits. Produit tensoriel. Catégories, foncteurs, transformations naturelles. Suites exactes courtes. Modules libres, projectifs et injectifs. Théorèmes de Wedderbun et de Maschke. Modules simples. Théorème de Krull-Schmidt.

Ch2. Complexes et homologie

Cônes et cylindres. Homologie et homotopie. Lemme du serpent. Résolutions libres, projectives et injectives. Foncteurs dérivés classiques. Foncteurs Tor et Ext. Formule de Künneth.

Ch3. Applications: (co)homologie des groupes

Définitions basiques. Interprétation des groupes de (co)homologie d'ordre 0 et 1. Lemme de Shapiro.

$$\begin{tikzcd}
 & & A_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "a_2"] & & B_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "b_2"] & & C_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "c_2"] & & 0 \\
 & A_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "a_1"] & & B_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "b_1"] & & C_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "c_1"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & A'_2 \arrow[rr] & & B'_2 \arrow[rr] & & C'_2 & & \\
0 \arrow[r] & A'_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & B'_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & C'_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}(H_p, G) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{Hom}(Z_p, G) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{Hom}(B_p, G) & & \\
 & & & & f^* \downarrow\uparrow i^* & & \downarrow \partial^* & & \\
 & & \mathrm{Hom}(C_{p-1}, G) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Hom}(C_p, G) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Hom}(C_{p+1}, G) & & \\
 & & \downarrow i^* & & \uparrow \partial^* & & & & \\
 & & \mathrm{Hom}(Z_{p-1}, G) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{Hom}(B_{p-1}, G) & \rightarrow & \mathrm{Ext}(H_p, G) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Bibliographie:

Anderson, Frank W.; Fuller, Kent R. Rings and categories of modules. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 13. Springer-Verlag, New York, 1992. x+376 pp.

Assem, Ibrahim. Algèbres et modules: cours et exercices. Presses Université Ottawa, 1997. 330 pp.

Assem, Ibrahim; Simson, Daniel; Skowroński, Andrzej. Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory. London Mathematical Society Student Texts, 65. *Cambridge University Press, Cambridge,* 2006. x+458 pp.

Etingof, Pavel; Golberg, Oleg; Hensel, Sebastian; Liu, Tiankai; Schwendner, Alex; Vaintrob, Dmitry; Yudovina, Elena. Introduction to representation theory. With historical interludes by Slava Gerovitch. Student Mathematical Library, 59. American Mathematical Society, 2011. viii+228 pp.

Osborne, M. Scott. Basic homological algebra. Graduate Texts in Mathematics, 196. 2000. x+395 pp.

Rotman, Joseph J. An introduction to homological algebra. Second edition. Universitext. ,2009. xiv+709 pp.

Weibel, Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.

Sujets possibles:

-Cohomologie des algèbres de Hopf;

-La propriété de Koszul des algèbres de carquois;

-La théorie des représentation d'une algèbre tordue par un groupe.

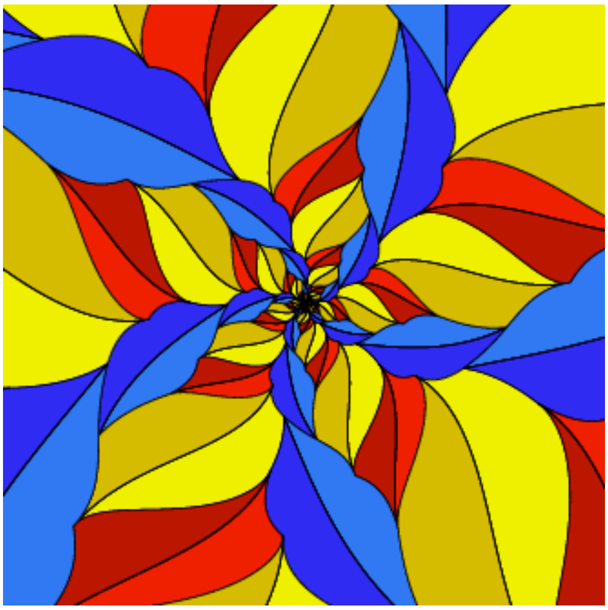
Méthodes effectives pour les groupes arithmétiques (Martin Deraux, 24h)

Les groupes arithmétiques sont les groupes qui admettent une description comme l'ensemble des matrices entières dans un groupe défini sur les rationnels (quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, et à prendre l'image par un homomorphisme surjectif à noyau compact). Ils apparaissent au coeur de plusieurs domaines des mathématiques, depuis la géométrie et topologie de petite dimension à la théorie des nombres.

On s'intéressera aux groupes arithmétiques d'isométries des espaces hyperboliques réels et complexes, pour lesquels le quotient de l'espace hyperbolique sous l'action du groupe est bien défini et de volume fini.

L'objectif central du cours sera de développer des outils permettant de trouver un domaine fondamental pour l'action sur l'espace hyperbolique d'un groupe arithmétique donné. Ceci permet alors d'obtenir une présentation en termes de générateurs et de relations, de faire la liste de toutes les classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini, de résoudre le problème du mot.

On s'intéressera aussi à quelques applications à la recherche de sous-groupes sans torsion d'indice minimal, en utilisant des outils de théorie des groupes (énumération de classes latérales d'un sous-groupes, méthode de Reidemeister-Schreier).



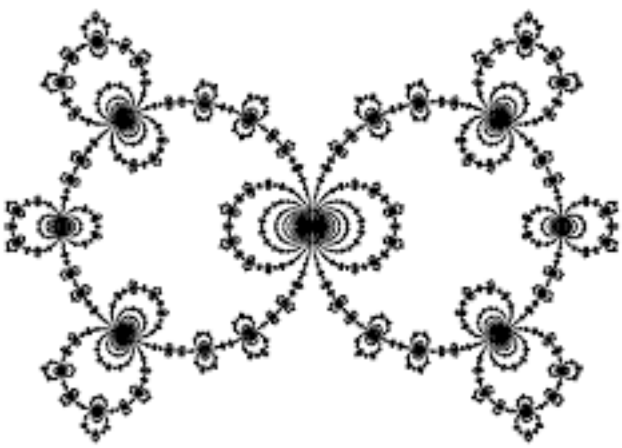
Credit: R. Schwartz

Hyperbolicités dans les groupes discrets (François Dahmani, 24h)

Si Max Dehn utilisait déjà l'hyperbolicité du plan hyperbolique pour étudier les groupes fondamentaux des surfaces, c'est Misha Gromov, en 1986, qui révolutionna l'étude de la théorie des groupes, en y déployant les méthodes géométriques des « quasi-isométries » et de la « géométrie grossière à grande échèle ». Les groupes hyperboliques de Gromov sont abondant, et leur structure est riche et bien comprise depuis ces dernières 30 années.

Récemment, des propriétés d'hyperbolicité incomplète ont été découvertes dans de nombreux groupes, et dans des circonstances variées. De l'hyperbolicité relative à l'hyperbolicité acylindrique, en passant par l'hyperbolicité mésoscopique, et l'hyperbolicité hiérarchique, les outils sont devenus nombreux, et rares (et très rigides !) semblent les groupes qui ne montrent aucune espèce d'hyperbolicité.

Le but du cours est d'explorer quelques unes de ces notions et quelques belles applications, avec comme outil central, le théorème de chirurgie hyperbolique de Dehn.



Credit : K. Ruane, C. Hruska, F. Dahmani, D. Groves