Master de Mathématiques Avancées, 2e année (MA2), 2015-2016

Cette formation s'appuie sur les deux laboratoires de mathématiques de l'Université de Lyon : l'Institut Camille Jordan (Université Lyon 1, INSA Lyon, École Centrale de Lyon, Université de Saint-Etienne), et l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées (École Normale Supérieure de Lyon).

Elle est accessible à tout étudiant ayant validé la première année (MA1), ou ayant validé un M1 de mathématiques ou équivalent et accepté par la commission de sélection. Elle fournit les 60 crédits ECTS permettant de compléter un Master de mathématiques.

Son débouché naturel est une thèse de mathématiques.

Fonctionnement

Au premier semestre, chaque étudiant(e) suit deux Cours Fondamentaux (36 h de cours, 18 h de TD), comptant pour 12 crédits ECTS chacun. Sauf exception avec l'accord du responsable du MA2, ces deux cours font partie d'un même parcours parmi les quatre proposés en 2014-2015.

Au second semestre, il ou elle suit deux Cours Avancés (24 h de cours) comptant chacun pour 6 ECTS, et l'UE Séminaire, comptant pour 6 ECTS.

L'année se termine par un stage de quatre mois dans un laboratoire de recherche en mathématiques, donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et d'une soutenance orale, et comptant pour 18 ECTS.

Liste des parcours

Parcours Combinatoire

Ce parcours a pour but d'introduire divers aspects classiques et modernes de la combinatoire. L'objectif est d'étudier des concepts et techniques de combinatoire pour aborder des problèmes issus de disciplines telles que l'algèbre, la théorie des nombres, la théorie de Ramsey ou la théorie des graphes. On abordera aussi des aspects algorithmiques de la théorie.

Pour illustrer l'ampleur du champ scientifique couvert par les méthodes combinatoires (et plus généralement des mathématiques discrètes), ce parcours propose de suivre deux cours du Master 2 d'informatique fondamentale de l'ENS Lyon, parmi les quatre qui peuvent s'y rattacher.

Cours fondamentaux

1 Combinatoire algébrique et topologique
Bodo Lass et Luca Zamboni

2 Combinatoire et fonctions spéciales
Jiang Zeng

Cours avancés

1 Combinatoire des groupes de Coxeter
Riccardo Biagioli et Philippe Nadeau

2 Deux UE à choisir dans le Master Informatique fondamentale
Choix proposé

Networks Algorithms, Marie-France Sagot

Tilings : between Dynamical Systems and Computability, Nathalie Aubrun and Mathieu Sablik

Finite Automata in Number Theory

Probabilistic Methods, with Applications to Large Graphs, Louis Esperet and Stephan Thomassé

Combinatoire algébrique et topologique

Bodo Lass et Luca Zamboni

Ce cours consiste en deux parties : (I) Polynômes et Graphes, (II) Combinatoire dans la compactification de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

(I) On étudie les résultats en théorie des graphes et matroïdes autour du polynôme de Tutte et ses cas particuliers (couplages, coloriages, orientations acycliques) et du polynôme d'Ehrhart. Une méthode principale de cette partie est l'algèbre des fonctions d'ensemble.

(II) Le principe de base de la théorie de Ramsey est qu'on ne peut pas avoir de désordre complet dans une structure assez grande, et qu'une telle structure contient nécessairement des sous-structures ayant un certain ordre. L'exemple le plus classique est donné par le principe des tiroirs, énoncé par Dirichlet en 1834.

D'autres théorèmes fondamentaux sont le théorème de van der Waerden, le théorème de Rado sur l'existence de solutions monochromatiques d'un système d'équations linéaires homogènes, le théorème de Ramsey sur l'existence de sous-graphes complets monochromatiques, le théorème de Schur : pour toute partition finie de $\mathbb{N}$, l'une des parties contient trois entiers x, y, z tels que $z = x + y$, et le théorème de Hindman : pour toute partition finie de $\mathbb{N}$, l'une des parties contient toutes les sommes finies d'une suite infinie $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nous allons étudier une méthode très puissante pour obtenir ce type de résultats, qui utilise la compactification de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ et présente des liens fascinants avec la dynamique topologique.

Contenu du cours

Graphes et polynômes

I Algèbre des fonctions d'ensembles, Dénombrement de fonctions et dualité. Couplages dans les graphes bipartis, chemins et cycles hamiltoniens.

II Polynôme de couplage : racines réelles, transformation de Fourier, transformation de Bargmann-Segal, diagrammes de Feynman, produits de Wick.

III Commutation partielle, polynôme chromatique et orientations acycliques. Matroïdes, polynôme de Tutte et algèbres de Lie. Polynôme d'Ehrhart.

Combinatoire dans la compactification de Stone-Čech de $\mathbb{N}$

I Généralités sur $\beta\mathbb{N}$ (structure topologique, structure algébrique, ultrafiltres idempotents, théorème de Hindman).

II Idempotents minimaux, central sets de Furstenberg et applications : Central sets theorem.

III Applications à la théorie de Ramsey (théorèmes de Van der Waerden, de Hales-Jewett) et liens avec la dynamique topologique.

Références

1. P. Cartier et D. Foata, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements,*, Springer Lect. Notes in Math. 85, 1969. Electronic version, with three new appendices by D. Foata, B. Lass and Ch. Krattenthaler, 2006,
   `http://www.emis.de/journals/SLC/books/cartfoa.html`
2. F. R. K. Chung, R. L. Graham, *On the cover polynomial of a digraph*, J. Combin. Theory Ser. B 65 (1995), 273-290.
3. P. Flajolet, Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, 2009.
4. C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.
5. *B. Lass*, *The N-dimensional matching polynomial*, Geom. Funct. Anal. 15 (2005), 453-475.
6. L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, Akadémiai Kiadó-North-Holland, 1993. Reprint : AMS Chelsea, 2007.
7. M.L. Mehta, *Matrix Theory, Selected Topics and Useful Results*, Les Editions de Physique, 1989.
8. R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1 et 2, Cambridge Univ. Press, 1997-1999. Second ed. Vol. 1, 2012.
9. X. Viennot, Cours Combinatoire.
10. H.S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Third edition, AK Peters, 2006. Second edition on `http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`
11. N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Comb. Theory Ser. A 17 (1974), 1-11.
12. N. Hindman and D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification : theory and applications*, de Gruyter, 1998.
13. H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, 1981.

Combinatoire énumérative et fonctions spéciales

Jiang Zeng

Après une introduction à la théorie des q-séries et partitions d'entiers, on présente la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux développée par Flajolet et Viennot et des applications récentes aux problèmes de γ-positivité. On discutera ensuite de divers q-analogues des polynômes eulériens et de leurs liens avec d'autres domaines des mathématiques.

Programme

I Introduction aux q-séries : séries hypergéométriques (et basiques). Formule q-binomiale et formules sommatoires classiques. Coefficients q-binomiaux avec interprétations en partitions. Lemme et chaîne de Bailey. Identités de Rogers-Ramanujan.

II Combinatoire des polynômes orthogonaux. Théorie de Viennot des polynômes orthogonaux généraux (ou formels) : fractions continues de type Stieltjes-Jacobi, relation de récurrence à trois termes, formule de Christoffel-Darboux, problème des moments, déterminants de Hankel, formule d'addition de Rogers-Stieltjes, chemins de Motzkin et chemins de Dyck.

III Combinatoire des moments de polynômes classiques. Modèles combinatoires pour les polynômes orthogonaux de Sheffer et leurs moments. Polynômes eulériens et bijections de Françon-Viennot, Foata-Zeilberger. Un calcul combinatoire de l'intégrale d'Askey-Wilson.

IV q-analogues des polynômes eulériens. Formule d'inversion de Lagrange à plusieurs variables et sa β-extension. Théorème Maître de MacMahon et applications. Statistiques Euler-Mahoniennes sur les permutations. Bijections de Garsia-Gessel, Reutenauer-Gessel. Fonctions quasi-symétriques. Les q-polynômes euleriens de Carlitz, de Stanley et de Shareshian-Wachs.

Références

1. T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, 1981.
2. G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Encycl. of Math. and its App. 71, Cambridge Univ. Press, 1999.
3. I.M. Gessel, C. Reutenauer, *Counting permutations with given cycle struc- ture and descent set*, J. Combin. Theory Ser. A 64 (1993) 189-215.
4. John Shareshian, Michelle L. Wachs, *Eulerian quasisymmetric functions*, Adv. Math. 225 (2010), no. 6, 2921-2966.
5. R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1 et 2, Cambridge Univ. Press, 1997-1999. Second ed. Vol. 1, 2012.
6. X.G. Viennot, *Une théorie combinatoire de polynômes orthogonaux*, Lecture Notes, Université du Québec à Montréal 1984.

Combinatoire des groupes de Coxeter

Riccardo Biagioli et Philippe Nadeau

Les groupes de Coxeter sont des objets fondamentaux, proches des groupes de transformations de l'espace engendrés par des réflexions - les deux notions coïncident d'ailleurs dans le cas fini. L'émergence récurrente de ces structures dans divers domaines d' algèbre , géométrie ou combinatoire motive leur étude approfondie.

Ce cours présentera la théorie fondamentale des groupes de réflexion et de Coxeter, en se basant sur les ouvrages de Humphreys et de Björner et Brenti. De là on abordera des questions combinatoires récentes autour des « partitions non croisées » associées aux groupes de Coxeter.

Contenu du cours

Le cours débutera par la classification des groupes finis de l'espace euclidien engendrés par des réflexions. Les groupes affines associés seront alors introduits, ainsi que les notions géométriques fondamentalement reliées : systèmes de racines, arrangements d'hyperplans, chambres et alcoves de Weyl. On se basera sur l'approche de l'ouvrage de Humphreys.

On sera naturellement amené à la définition des groupes de Coxeter via générateurs et relations. Cela entraînera une étude des propriétés combinatoires de la fonction longueur et des décompositions réduites. On introduira aussi les relations d'ordre (faible, Bruhat) sur les groupes de Coxeter. L'accent sera mis dans cette partie sur les nombreuses questions énumératives, parfois délicates, soulevées par ces notions. Notre source principale sera ici le livre de Björner et Brenti.

Nous présenterons finalement les problématiques récentes nées autour du treillis des partitions non croisées associé à un groupe de Coxeter fini. Il s'agit là d'un champ de recherches très actif, dont les bases sont données dans le mémoire de Armstrong.

Références

1. A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Springer Grad. texts in Math. 231, 2005.
2. J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter groups*, Cambrdige Univ. Press, 1990.
3. D. Armstrong, *Generalized Noncrossing Partitions and Combinatorics of Coxeter Groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 202 (2009), no. 949.
4. B.E. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Second edition*, Springer Grad. Texts in Math. 203, 2001.
5. R. Kane, *Reflection groups and invariant theory*, CMS Books in Math. 5, Springer, 2001.
6. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV-V-VI*, Hermann, 1968.
7. S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, in *Geometric combinatorics*, 63-131. IAS/Park City Math. Ser. 13, 2007, Amer. Math. Soc.

Cours du Master 2 d'Informatique Fondamentale

Le descriptif des cours du Master 2 d'Informatique Fondamentale, comprenant notamment les quatre cours proposés au choix des étudiants du parcours Combinatoire, se trouve sur `http://www.ens-lyon.fr/DI/?p=3752`.

Parcours Équations aux dérivées partielles

Deux grandes classes de méthodes sont introduites au premier semestre : tout d'abord les méthodes variationnelles et la théorie elliptique, qui jouent un rôle clé dans l'étude de problèmes mêlant analyse et géométrie, et qui seront examinées dans le contexte particulier mais néanmoins très riche des surfaces minimales. La perturbation singulière et la théorie de l'homogénéisation sont quant à elles fondamentales pour comprendre, interpréter et analyser mathématiquement une large catégorie de modèles physiques en lien notamment avec divers problèmes d'écoulement.

Au second semestre, le premier cours avancé est consacré aux équations d'évolution dans le cadre physiquement plus pertinent, mais mathématiquement bien plus difficile, où le domaine d'étude est borné. Le cours présentera les principales approches utilisées pour plusieurs exemples fondamentaux. Le second cours avancé est dédié aux liens étroits entre la théorie du transport optimal et les équations paraboliques, liens qui sont à la croisée de l'optimisation, des probabilités et de l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Cours fondamentaux

---

1 Méthodes variationnelles et théorie elliptique
Étude des surfaces minimales
Olivier Druet

---

2 Une introduction à la perturbation singulière et à l'homogénéisation
Andro Mikelić

Cours avancés

---

1 Problèmes aux limites pour les équations d'évolution
Sylvie Benzoni

---

2 Théorie du transport optimal et ses liens avec des équations paraboliques
Ivan Gentil

Méthodes variationnelles et théorie elliptique
Étude des surfaces minimales

Olivier Druet

Ce cours utilisera un fil rouge, l'étude des surfaces minimales et des surfaces à courbure moyenne constante dans $\mathbb{R}^3$, pour introduire un certain nombre d'outils classiques en EDP elliptiques (et paraboliques si le temps le permet). L'analyse des problèmes géométriques a été historiquement (et est toujours) un moteur essentiel du développement du calcul des variations. Ceci est dû à l'invariance des équations issues de problèmes géométriques par des groupes de difféomorphismes qui sont souvent assez gros. Cela rend les équations en jeu critiques, cas limites d'équations faciles à traiter.

Les surfaces minimales et à courbure moyenne constante sont assez simples à appréhender géométriquement puisque nous travaillerons sur des surfaces (dimension 2) dans l'espace euclidien. Malgré tout, nous aurons besoin de tout un panel de méthodes variationnelles et de théorie elliptique standard pour les étudier. Certains outils plus subtils (compacité par compensation, méthode des "moving planes", théorie de Liapunov-Schmidt, ...) seront également au programme.

L'objectif du cours est donc de fournir une boîte à outils pour se lancer dans le domaine de l'analyse géométrique ou plus généralement dans tout domaine utilisant du calcul variationnel et / ou des équations aux dérivées partielles elliptiques.

Contenu du cours

1. Rappels (ou pas) sur les surfaces dans $\mathbb{R}^3$: paramétrisations diverses et variées, les différentes courbures, le theorema egregium de Gauss, l'interprétation de la courbure moyenne comme variation de l'aire.

2. Introduction aux surfaces minimales : représentation de Weierstrass, théorème de Bernstein, nombreux exemples.

Outils d'analyse : un peu d'analyse complexe, principe du maximum.

3. Problème de Plateau (ou des films de savon) : étant donné un contour (une courbe) γ dans $\mathbb{R}^3$, existe-t-il une surface minimale s'accrochant sur ce contenu ? C'est exactement ce que donnerait l'expérience suivante : tremper un fil de fer de la forme γ dans un bac de liquide savonneux, le ressortir. Le film de savon serait accroché au fil de fer et aurait la forme d'une surface minimale. Nous démontrerons résultats d'existence, régularité des solutions. Nous essaierons aussi de compter le nombre de solutions.

Outils d'analyse : Calcul variationnel (donc espaces de Sobolev), théorie elliptique standard pour la régularité, théorie du degré.

4. Etude des surfaces à courbure moyenne constante : théorème d'Alexandrov (unicité des surfaces compactes plongées à courbure moyenne constante), exemples classiques (surfaces de révolution de Delaunay,...), exemples de surfaces immergées (ou plongées non compactes) à courbure moyenne constante.

Outils d'analyse : Principe du maximum, méthode des "moving-planes", théorème des fonctions implicites amélioré (réduction de Liapunov-Schmidt) pour construire des solutions.

5. Problème de Plateau pour les surfaces à courbure moyenne constante : existence d'une petite et d'une grande solution.

Outils d'analyse : Calcul variationnel, compacité par compensation (Tartar, Wente).

Enfin, si nous avons le temps, nous étudierons soit les surfaces de Willmore, soit le flot (parabolique) de courbure moyenne.

Tous ces sujets sont extraordinairement actifs. L'étude des surfaces à courbure moyenne constante, des surfaces de Willmore, est un domaine en pleine expansion où plein de jolis problèmes sont encore ouverts. Quant aux surfaces minimales, il y a encore plein de choses à comprendre, en particulier lorsqu'on les regarde dans des variétés plutôt que dans l'espace eulcidien. Ce cours permettra donc de passer en revue un certain nombre d'outils classiques d'analyse tout en ouvrant à de nombreuses pistes de recherche.

Références

[1] M. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[2] M. Struwe, *Plateau's problem and the calculus of variations*, Princeton Math. Notes, 1988.

Une introduction à la perturbation singulière et à l'homogénéisation

Andro Mikelić

Contenu du cours

1. Introduction à la perturbation régulière et singulière pour les EDO. Méthode du groupe de renormalisation appliquée aux problèmes de la perturbation singulière. Théorème de Tikhonov sur la perturbation singulière. Développements asymptotiques raccordés.
2. Technique de la variété centrale. Perturbation singulière anisotrope. Applications aux EDP de la convection-diffusion : étude détaillée de la dispersion de Taylor.
3. Homogénéisation. Méthode heuristique : développement en double échelle. Exemples (la diffusion de la chaleur, un composite élastique, la filtration à travers un milieu poreux,...)
4. Techniques pour étudier la convergence des développements multiéchelles : convergence à deux échelles, méthode d'énergie de Tartar, Gamma-convergence, éclatement périodique.
5. Applications :
   i) Propriétés des composites
   ii) Modélisation de la filtration dans les milieux poreux (loi de Darcy)
   iii) Modélisation des frontières rugueuses (dérivation de la loi de Navier de glissement) et des couches limites visqueuses
   iv) Homogénéisation des problèmes fluide-structure, les équations de Biot
   v) Modélisation des écoulements sanguins dans les artères déformables, loi de Laplace.
   vi) Homogénéisation des EDP du transport réactif en milieu poreux
   vii) Modélisations des milieux poroélastiques minces
   viii) Ecoulements électrochimiques dans un milieu poreux avec des nanopores.

Références

[1] L.Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, *Renormalization group and singular perturbations : Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory*, Phys. Rev. E 54, (1996), 376-394.

[2] H. Chiba,C^1 *approximation of vector fields based on the renormalization group method*, SIAM J. Appl. Dym. Syst., Vol.7, No.3, (2008) 895–932.

[3] R. E. Lee DeVille, A. Harkin, M. Holzer, K. Josić, T. Kaper, *Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations*, Physica D, 237 (2008), pp. 1029-1052.

[4] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Appl. Math. Sci. 35, Springer, 1981.

[5] J. Banasiak, M. Lachowicz, *Methods of small parameter in mathematical biology and other applied sciences*, Birkhäuser, 2014.

[6] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, O. A. Olenik, *Homogenization of differential operators and integral functionals.* Translated from the Russian by G. A. Yosifian, Springer, 1994.

[7] G. Pavliotis and A. Stuart, *Multiscale Methods : Averaging and Homogenization*, Texts in Appl. Math. 53, Springer, 2008.

[8] U. Hornung, *Homogenization and Porous Media*, Interdiscipl. Appl. Math. 6, Springer, 1997.

[9] A. Mikelić, *Homogenization theory and applications to filtration through porous media*, in *Filtration in Porous Media and Industrial Applications*, 127-214, Springer Lect. Notes in Math. 1734, 2000.

Problèmes aux limites pour les équations d'évolution

Sylvie Benzoni

Les problèmes d'évolution sont en général posés dans des domaines bornés en espace, que ce soit pour des raisons physiques ou pour des questions d'approximation numérique. Leur étude se révèle souvent bien plus délicate que celle de problèmes de Cauchy posés dans tout l'espace. Le but de ce cours est de présenter les outils qui permettent d'étudier les problèmes d'évolution avec conditions aux limites, en les appliquant à quelques exemples fondamentaux.

Contenu du cours

1. Problèmes en dimension un
   (a) Problème de Dirichlet linéaire : représentation des solutions par transformation de Laplace (chaleur, Schrödinger), par la méthode de Fokas et al. (Airy).
   (b) Conditions aux limites pour les phénomènes de transport : nombre et nature des conditions ; analyse du problème aux valeurs initiales et aux limites continu (EDP) et discret (schémas aux différences finies).
   (c) Conditions aux limites artificielles (transport, chaleur, Schrödinger).
2. Problèmes multi-dimensionnels
   (a) Condition de Kreiss-Lopatinskii, application aux fluides compressibles.
   (b) Méthode des symétriseurs de Kreiss (cas hyperboliques et dispersifs).

Références

[1] Corentin Audiard, *Non-homogeneous boundary value problems for linear dispersive equations*, Comm. Partial Differential Equations, 37(1) :1-37, 2012.

[2] Sylvie Benzoni-Gavage and Denis Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford, University Press, Oxford, 2007.

[3] Jean-François Coulombel. *Stability of finite difference schemes for hyperbolic initial boundary value problems II.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 10 (2011), 37-98.

[4] Athanassios S. Fokas. *A unified approach to boundary value problems*, volume 78 of CBMS-*NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2008.

[5] Heinz-Otto Kreiss and Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, volume 47 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004. Reprint of the 1989 edition.

Théorie du transport optimal
et ses liens avec des équations paraboliques

Ivan Gentil

Le but de ce cours est d'introduire la distance de Wasserstein (distance entre mesures de même masse). Cette distance est la base de nombreux développements récents. C'est par exemple une distance naturelle pour montrer la convergence à l'équilibre de certaines EDP d'évolution, elle permet aussi de définir l'équation de la chaleur comme le flot gradient de l'entropie de Boltzmann... Le but de ce cours est d'une part l'étude de cette distance de Wasserstein et d'autre part de voir ses liens avec les EDP paraboliques et le transport optimal.

Contenu du cours

1. **Étude de la distance de Wasserstein entre deux mesures de masse 1**
   - (a) Liens avec le transport optimal, problème de Monge et de Monge-Kantorovich.
   - (b) Théorème de dualité de Kantorovich
   - (c) Théorème de Brenier et démonstration de l'inégalité optimale de Sobolev par le transport optimal.
2. **Lien avec les EDP paraboliques**
   - (a) Étude des équations paraboliques et définition de la notion de courbure d'un opérateur. Définitions équivalentes de la notion de courbure (l'opérateur Γ_2)
   - (b) Équivalence entre la courbure d'un opérateur et la contraction en distance de Wasserstein (Théorème de von Renesse-Sturm).
   - (c) Équation de la chaleur comme flot gradient de l'entropie par rapport à la distance de Wasserstein.

Références

[1] C. Villani, *Optimal transport. OId and new*, Grund. der Math. Wiss. 338, Springer, 2009.

[2] D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux, *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*, Grund. der Math. Wiss. 348, Springer, 2014.

Parcours Probabilités

Le parcours Probabilités fournit une formation complète à la théorie moderne des probabilités, permettant d'aborder la plupart des pans de la recherche dans cette discipline.

Seront abordés, lors des deux cours fondamentaux, les thèmes centraux des probabilités qui suivent : mouvement Brownien, calcul stochastique d'Itô, processus de Markov et martingales à temps continu, équations différentielles stochastiques, percolation, modèle d'Ising, marches auto-évitantes, invariance conforme de la percolation 2-dimensionnelle, grandes déviations. Forts de ce bagage, les étudiants pourront alors aborder les cours avancés, qui peuvent être vus assez naturellement comme des prolongements des cours fondamentaux.

Le cours Mesures de Poisson, processus de Lévy et arbres aléatoires introduira le concept fondamental en probabilités des mesures de Poisson ponctuelles, et leurs applications à la construction des processus à accroissements indépendants et stationnaires (les processus de Lévy) et à la théorie des excursions d'Itô. On montrera comment ces processus interviennent naturellement dans des processus de fragmentation aléatoire et les généalogies qui codent naturellement ces processus.

Le cours Dynamiques de Glauber et convergence vers l'équilibre s'intéressera aux méthodes classiques permettant de traiter le problème de la vitesse de convergence vers l'équilibre d'une chaîne de Markov. Comme application, on s'intéressera plus spécifiquement au cas de la dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising du ferromagnétisme, et à l'ordre de grandeur du temps de mélange en fonction de la taille et de la phase du système.

Cours fondamentaux

1 Processus de Markov et calcul stochastique
Jean-Christophe Mourrat

2 Mécanique statistique et grandes déviations
Christophe Garban

Cours avancés

1 Mesures de Poisson, processus de Lévy et arbres aléatoires
Grégory Miermont

2 Dynamique de Glauber et convergence vers l'équilibre
Fabio Toninelli

Processus de Markov et calcul stochastique

Jean-Christophe Mourrat

L'objectif de ce cours est de présenter les outils fondamentaux pour l'étude des processus stochastiques à temps continu : la théorie des processus de Markov (comme le mouvement Brownien), les martingales, les intégrales stochastiques, les équations différentielles stochastiques et leur lien avec les EDP.

Les processus stochastiques en temps continu sont des évolutions temporelles aléatoires. Elles donnent lieu à des trajectoires aléatoires qui sont souvent assez sauvages et avec lesquelles il est assez difficile de développer un calcul différentiel ou intégral. Or, lorsqu'on veut modéliser la perturbation d'une évolution ordinaire (EDO ou EDP) par l'ajout d'un bruit, on se retrouve confronté à ce problème de devoir intégrer par rapport à des processus très irréguliers, pour lesquels le calcul intégral usuel ne s'applique pas. C'est le but de la théorie de l'intégrale stochastique que de donner un sens à ces objets.

On obtient ainsi un nouvel outil de calcul intégral, plus général que le calcul intégral usuel, donnant lieu à une formule d'intégration par parties d'un genre nouveau (la formule d'Itô) et du coup à des équations différentielles qui se résolvent autrement que de manière usuelle : les équations différentielles stochastiques, ou EDS.

Contenu du cours

- Processus à temps continu, théorème de Kolmogorov, régularisation
- Processus de Markov, semigroupe, générateur
- Le mouvement brownien, le processus de Poisson
- Martingales à temps continu
- Intégrales stochastiques par rapport à une semi-martingale
- Formule d'Itô
- EDS
- Formule de Feynman-Kac et applications
- Liens avec les EDP.

Références

[1] I. Karatzas & S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second edition*, Springer Grad. Texts in Math. 113, 1991.

[2] J.F. Le Gall, *Mouvement brownien et calcul stochastique*, `http://www.proba.jussieu.fr/cours/DEA-07.pdf`

[3] D. Revuz & M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion, Third edition*, Springer Grund. der Math. Wiss. 293, 1999.

[4] S.R.S. Varadhan, *Stochastic Processes*, Lecture Notes 16, Courant Institute, 2007.

Mécanique statistique et grandes déviations

Christophe Garban

La *mécanique statistique* est issue de la volonté de modéliser des systèmes physiques par un grand nombre de composants microscopiques aléatoires simples, en interaction, et d'expliquer de cette façon certaines propriétés macroscopiques (typiquement les transitions de phases et la brisure spontanée de symétrie). Cela a donné lieu au développement d'une branche importante de la théorie des probabilités, et le but de ce cours est de donner un aperçu des méthodes et outils qui y sont utilisés.

Dans la deuxième partie du cours, on se concentrera sur les modèles critiques bidimensionnels et le concept d'invariance conforme.

La troisième partie du cours portera sur la théorie des grandes déviations. Les applications de cette théorie ne se limitent pas au seul cadre de la mécanique statistique. En effet, la théorie des grandes déviations a pour but de quantifier la vitesse de convergence dans les théorèmes limites « classiques » (du type loi des grands nombres typiquement). Après avoir présenté cette théorie dans un cadre général, nous l'appliquerons à certains modèles de mécanique statistique.

Contenu du cours

1 Bases de la mécanique statistique

- Quelques modèles fondamentaux : percolation sur un graphe, modèle de spins (modèle d'Ising, XY model), modèles d'interfaces aléatoires (champ libre gaussien) et modèles désordonnés (polymères en milieu aléatoire)
- Marches aléatoires auto-évitantes et transition de phase dans le modèle de la percolation
- Limite thérmodynamique. Energie libre, entropie
- Mesures ou « état » de Gibbs
- Unicité de la mesure de Gibbs à haute température (critère de Do- brushin)
- Transitions de phase et brisure de symétrie à basse température (ar- gument de Peierls ...)
- Inégalités de corrélation (FKG, GKS)

2 Invariance conforme de la percolation critique en dimension deux

- Invariance conforme du mouvement Brownien
- Théorème de Russo-Seymour-Welsh pour la percolation critique
- Preuve de Smirnov de l'invariance conforme de la percolation par site sur réseau triangulaire
- Panorama des Processus SLE (Schramm Loewner Evolutions) et de l'invariance conforme pour les autres modèles de mécanique statistique en dimension deux (Ising, arbre couvrant uniforme ..)

3 Théorie des grandes déviations et applications à la Mécanique statistique

- Enoncés généraux (Cramer, Chernov, Varadhan)
- Liens avec l'entropie
- L'énergie libre vue comme une fonctionnelle de grandes déviations (par exemple le cas du modèle d'Ising avec magnétisation fixée)
- Systèmes dynamiques, mécanique statistique hors équilibre

Références

[1] Y. Velenik, Introduction aux champs aléatoires markoviens et gibbsiens, `http://www.unige.ch/math/folks/velenik/Cours/2006-2007/Gibbs/gibbs.pdf`

[2] W. Werner, Percolation et modèle d'Ising, SMF 2005

[3] F. den Hollander, Large deviations, Am. Math. Soc. (2000).

Mesures de Poisson, processus de Lévy et arbres aléatoires

Grégory Miermont

À l'image de la pluie, qui frappe aléatoirement le sol avec plus ou moins d'intensité, mais dont les gouttes prises individuellement ont une chance infime de tomber dans une région donnée, les mesures aléatoires de Poisson (aussi appelés nuages poissonniens) décrivent l'organisation collective d'événements aléatoires rares. Leur structure très élémentaire en fait des objets omniprésents en probabilités.

Nous en verrons quelques exemples fondamentaux, dont la construction de tous les processus à accroissements indépendants et stationnaires (dits processus de Lévy), qui sont les analogues en temps continu des marches aléatoires, et dont les sauts sont régis par des mesures de Poisson. Ceci nous amènera à l'étude des lois indéfiniment divisibles sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que l'on peut écrire comme la convolution n-ième d'une mesure avec elle même, pour tout $n^3 1$.

Un autre exemple d'application consistera en la théorie des excursions d'Itô, qui permet d'interpréter le mouvement brownien, processus continu par excellence, comme un nuage poissonnien de points formé par ses excursions loin de l'origine.

Nous verrons enfin comment ces deux exemples interviennent dans la descriptions des généalogies aléatoires associées à des processus de branchement ou de fragmentation, et que l'on peut voir comme des objets géométriques ($\mathbb{R}$-arbres) aléatoires.

Contenu du cours

- Processus de Poisson standard
- Mesures de Poisson sur un espace mesuré ?-fini
- Martingales associées à une mesure de Poisson, compensation
- Lois indéfiniment divisibles, formule de Lévy-Khintchine
- Processus de Lévy
- Théorie des excursions d'Itô, applications
- Arbres aléatoires discrets et continus

Références

[1] J. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge Univ. Press, 1996.

[2] J. Bertoin, *Random Fragmentation and Coagulation Processes*, Cambridge Univ. Press, 2006.

[3] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2ème édition, Wiley, 1971

[4] J.F.C. Kingman, *Poisson processes*, Oxford Univ. Press, 1993.

[5] J.F. Le Gall, *Random trees and applications*, Probab. Surveys 2, 2005, 245-311.

[6] D. Revuz & M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion, Third edition*, Springer Grund. der Math. Wiss. 293, 1999.

Dynamiques de Glauber et convergence vers l'équilibre

Fabio Toninelli

Les dynamiques dites « de Glauber » sont des processus stochastiques de Markov qui décrivent l'évolution temporelle de systèmes avec un grand nombre de degrés de liberté. Ces processus sont d'un grand interêt en probabilités, mais aussi en physique (ils sont couramment utilisés pour simuler numériquement des systèmes physiques avec un grand nombre de particules) et en informatique théorique. Un problème central est de comprendre à quelle vitesse le processus converge vers sa mesure stationnaire (d'équilibre).

Le but du cours est de donner une introduction à ce domaine actuel de recherche. Dans la première partie on introduira des outils généraux (à la fois probabilistes et analytiques) qui permettent de quantifier la vitesse de convergence vers la mesure d'équilibre. Dans la deuxième partie on verra quelques applications à des modèles importants issus de la mécanique statistique, tel que modèle d'Ising. En particuler, on s'intéressera au rapport entre les transitions de phase dans la mesure d'équilibre (brisure de symétrie, aimantation spontanée) et la vitesse de divergence du temps de relaxation avec la taille du système.

Ce cours a un lien étroit avec le cours fondamental « Mécanique statistique »

Contenu du cours

- Rappels sur les chaînes de Markov
- Dynamique de Glauber et algorithme de Metropolis
- Convergence en variation totale vers la mesure stationnaire : temps de melange
- Convergence en L^2 : trou spectral et principe variationnel
- Méthodes de couplage
- Inégalités FKG et monotonie de la dynamique
- « Simulations parfaites » : l'algorithme de Propp et Wilson
- Dynamique du modèle d'Ising I : convergence rapide vers l'équilibre à haute temperature
- Dynamique du modèle d'Ising II : divergence exponentielle du temps de relaxation à basse temperature

Références

[1] D. Levin, Y. Peres, E. Wilmer, *Markov Chains and Mixing times*, Amer. Math Soc., 2009.

[2] F. Martinelli, *Lectures on Glauber Dynamics for Discrete Spin Models*, *Lectures on Probability and Statistics (Saint-Flour, 1997)*, Springer Lect. Notes in Math. 1717, 1999.

Des références vers des articles plus spécialisés seront données au fur et à mesure du cours.

Parcours Topologie et géométrie

Ce parcours aborde deux thématiques reliées mais distinctes, à savoir la topologie algébrique et certains aspects de la géométrie différentielle.

Le premier cours fondamental est une introduction à la topologie algébri-que, notamment tournée vers ses aspects homologiques. Le second introduit à la géométrie symplectique et de contact, issue de la mécanique et des équations différentielles, et dont les aspects topologiques se sont fortement développés ces dernières années.

Les deux cours avancés explorent des développements plus récents : la théorie homotopique stable, qui est au cœur des développements actuels de la topologie algébrique, et les fonctions génératrices en géométrie symplectique et de contact, qui constituent la voie d'accès la plus géométrique aux progrès récents du domaine.

Cours fondamentaux

1 Introduction aux théories homologiques
Jean-Yves Welschinger

2 Introduction à la géométrie symplectique et de contact
Jean-Claude Sikorav

Cours avancés

1 Théorie homotopique stable
Frédéric Déglise

2 Fonctions génératrices en géométrie symplectique et de contact
Marco Mazzucchelli

Cours fondamental 1, Jean-Yves Welschinger

Introduction aux théories homologiques

Le but du cours est de fournir une introduction aux théories classiques de l'homologie des variétés, des faisceaux et des complexes cellulaires.

On commencera par une présentation des variétés et des faisceaux. On introduira ensuite la colomologie de Čech, l'homologie simpliciale, l'homologie singulière et l'homologie cellulaire. S'ensuivra un chapitre consacré à l'algèbre homologique. On finira par une introduction aux groupes d'homotopie des variétés et complexes cellulaires.

Références

[1] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition.

[2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002. Aussi sur `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

Cours fondamental 2, Jean-Claude Sikorav

Introduction à la géométrie symplectique et de contact

La géométrie symplectique est née de la reformulation par Lagrange et Hamilton des équations newtoniennes de la mécanique. Sa sœur de dimension impaire, la géométrie de contact provient de l'étude géométrique des EDP d'ordre un (notamment par Jacobi) et sa généralisation par Lie.

Le cours est structuré en trois parties : une introduction aux systèmes lagrangiens et hamiltoniens via les équations de la mécanique, une présentation des principaux objets de la géométrie symplectique et de contact, et une étude des actions hamiltoniennes de tores, qui permettra d'illustrer concrètement le fonctionnement de ces objets et d'introduire à un domaine vivant et accessible de la recherche actuelle.

Programme

I Systèmes lagrangiens et hamiltoniens

(a) Des équations de Newton à celles de Lagrange et Hamilton
(b) Principe variationnel, systèmes hamiltoniens convexes
(c) Systèmes hamiltoniens généraux

II Notions fondamentales de géométrie symplectique et de contact

(a) Géométrie symplectique linéaire
(b) Formes et variétés symplectiques
(c) Sous-variétés lagangiennes
(d) Réduction symplectique

III Actions hamiltoniennes de tores

(a) Actions symplectiques et hamiltoniennes de tores
(b) Propriétes de l'application moment
(c) Point de vue symplectique sur les variétés toriques

Références

[1] V. I. Arnol'd, *Méthodes mathématiques de la mécanique céleste*. Traduit du russe par Djilali Embarek, Mir, 1976. Version anglaise : *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad.

[2] M. Audin, *Torus actions on symplectic manifolds. Second revised edition*, Progr. in Math. 93, Birkhäuser, 2004.

[3] H. Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Univ. Press, 2008.

[4] D. McDuff et D. Salamon, *Introduction to symplectic topology, second edition*, Oxford Math. Monogr., 1998.

[5] Notes du cours.

Cours avancé 2 : Théorie homotopique stable

Frédéric Déglise

Le but de ce cours est de présenter les idées maîtresses de la théorie homotopique stable.

D'une part, on se concentrera sur des propriétés purement homotopiques, comme le théorème de suspension de Freudenthal, ou l'application de Hopf. D'autre part, on présentera la construction de la catégorie homotopique stable, sous un angle concret avec la construction de Spanier-Whitehead et l'exemple des espaces d'Eilenberg-MacLane, et une présentation de la construction abstraite, avec une introduction aux techniques des catégories de modèles.

La dernière partie du cours se concentrera sur l'étude des cohomologies généralisées, et en particulier la théorie de l'orientation. On présentera les exemples importants comme le cobordisme complexe, la K-théorie complexe et on élargira sur les débuts de la théorie dite de la « filtration chromatique ».

Contenu du cours

1) **Homotopie stable**
   a) Introduction (rappels sur les groupes d'homotopie et CW-complexes)
   b) Théorème de suspension de Freudenthal
   c) Homotopie stable des sphères, application de Hopf
2) **Spectres**
   a) Définition de Spanier-Whitehead (dualité)
   b) Espaces d'Eilenberg-MacLane (+représentabilité de Brown)
   c) Construction moderne (spectres symétriques, catégories de modèles)
   d) Structure triangulée (suites fibres/cofibres), monoïdale (smash-produit)
3) **Théorie de l'orientation**
   a) Spectres en anneaux et cohomologie/homologie associées
   b) Suites spectrales (ex : Atiyah-Hirzebruch)
   c) Théorie de l'orientation, classes charactéristiques
   d) Lois de groupe formel
4) **Tour d'horizon**
   a) Cobordisme : définition de Thom, résultats de Quillen
   b) K-théorie : fibré vectoriel, théorème de Riemann-Roch
   c) Théories de Landweber, cohomologies elliptiques

Références

1. J.F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*. Reprint of the 1974 original. Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, 1995.
2. D. Quillen, *Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations*, Adv. in Math. 7 (1971), 29-56.
3. D. Quillen, *On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory*. Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1293-1298.
4. H. Spanier, *Algebraic topology*, Corrected reprint. Springer 1981.
5. R.E. Stong, *Notes on cobordism theory*, Math. Notes ,Princeton Univ. Press, Princeton, 1968.
6. R. Switzer, *M. Algebraic topology - homotopy and homology*, Reprint of the 1975 original, Classics in Math, Springer, 2002.

Cours avancé 2, Marco Mazzucchelli

Fonctions génératrices en géométrie symplectique et de contact

Les sous-variétés lagrangiennes d'un fibré cotangent (ou legendrienne d'un fibré de jet) sont parmi les protagonistes de la topologie symplectique et de contact. Parmi celles-ci, celles qui sont décrites par des fonctions génératrices (définies sur le produit de la base par un espace de paramètres supplémentaires) jouent un rôle central. Elles jouissent de remarquables propriétés de rigidité, ce qui implique notamment des résultats d'intersections de sous-variétés lagrangiennes, de points fixes de difféomorphismes symplectiques, d'orbites préirodiques de systèmes hamiltoniens.

De plus, la fonction génératrice est essentiellement unique quand elle existe, et elle peut être employée pour construire des invariants symplectiques : les capacités symplectiques, et l'homologie symplectique. Ces invariants permettent notamment de prouver les résultats fondateurs de la toplogie symplectique (non-tassement).

Dans ce cours, après avoir introduit les quelques éléments de théorie des points critiques nécessaires pour la suite, on introduira les fonctions génératrices et on prouvera en détail certains résultats de rigidité symplectique, et leur version dans le cadre de la topologie de contact.

Contenu du cours

I Eléments de théorie des points critiques

- Point critique, indice de Morse, lemme de Morse généralisé
- Homologie locale et lemme de scission
- Inégalités de Morse
- Théorème de Lusternik-Schnirelmann

II Phénomènes de rigidité symplectique

- Fonctions génératrices de lagrangiennes et legendriennes
- Existence de fonctions génératrices
- Intersections lagrangiennes dans un cotangent
- Points fixes de diffeomorphismes hamiltoniens du tore

III Indice de Maslov et applications

- Définition et propriétés de l'indice de Maslov
- Lien avec l'indice de Morse des fonctions génératrices
- Points périodiques des diffeomorphismes hamiltoniens du tore
- Points fixes de diffeomorphismes hamiltoniens de l'espace projectif complexe
- Indice de Maslov non-lineaire

IV Invariants symplectiques

- Unicité de fonctions génératrices
- Invariants spectraux de lagrangiens et legendriens
- Capacités symplectiques et de contact
- Homologie symplectique et de contact
- Non-tassement symplectique et de contact

Références

[1] Notes du cours

[2] K.-C. Chang, *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*, Progr. in Nonlin. Diff. Eq. 6, Birkhäuser, 1993

[3] J.-C. Sikorav, *Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent*, Comment. Math. Helv. 62 (1987), 62-73.

[4] Y. Long, *Index theory for symplectic paths with applications*, Progr. in Math., 207, Birkhäuser

[5] M. Mazzucchelli, *Symplectically degenerate maxima via generating functions*, Math. Z. 275 (2013), 715-739.

[6] S. Sandon, *Contact homology, capacity and non-squeezing in* $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ *via generating functions*, Ann. Inst. Fourier 61 (2011), 145-185.

[7] D. Théret, *Rotation numbers of Hamiltonian isotopies in complex projective spaces*, Duke Math. J.94 (1998), 13-27.

[8] L. Traynor, Symplectic Homology via generating functions, Geom. Funct. Anal. 4 (1994), 718-748

[9] Viterbo, Symplectic topology as the geometry of generating functions, Math. Ann. 292 (1992), p. 685-710